2018年 工学部・情報工学部 第3問

$\boxed{3}$ 平面α上の$\triangle$OABに対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=t$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$とする．ただし，$0<\theta<\pi$とする．また，$\triangle$OABの面積を$S$とする．次に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-4\sqrt{3}S$を$t$，$\cos\theta$，$\sin\theta$を用いて表せ．

(2) tを固定したとき，(1)で求めた式を$f(\theta)$とする．$f(\theta)$の最小値をtを用いて表せ．また，その最小値をとるときのθの値を求めよ．

設問(3)，(4)では，点Pが平面α上を動くものとし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{x}$とする．

(3) tおよびθを固定したとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2$の最小値を$t$，$\cos\theta$を用いて表せ．また，その最小値をとるときの$\vec{x}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(4) t，θおよび$\vec{x}$によらず，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2\geqq\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S$が成り立つことを示せ．また，この不等式において等号が成立するのはどのような場合か答えよ．