# 九州歯科大学

2013年 歯学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 頂点間の距離が24であり，焦点が$(20,\ 0)$と$(-20,\ 0)$である双曲線の方程式を求めよ．

(2) 初項を$a_1 = 4$とする数列$\{a_n\}$と初項を$b_1 = 1$とする数列$\{b_n\}$に対して，$c_n = \sqrt{a_n b_n}$，$d_n = \sqrt{\dfrac{a_n}{b_n}}$ とおく．ただし，$a_n > 0$，$b_n > 0$とする．数列$\{c_n\}$が公差2の等差数列となり，数列$\{d_n\}$が公比3の等比数列となるとき，$a_5$と$b_5$の値を求めよ．

(3) 関数$f(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$が

$$f(-x) = -f(x),\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3} = 6,\quad \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

をみたすとき，定数$A$，$B$，$C$，$D$，$E$，$F$の値を求めよ．

(1) 焦点がx軸上にあることから．求める双曲線は．$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ と表せる．$(a, b > 0)$

頂点は$(\pm a, 0)$より．$2a = 24$　$\therefore a = 12$

また焦点は$(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ より．$\sqrt{12^2+b^2} = 20$　$\therefore b^2 = 256$．

$\therefore$ 方程式は　$\underline{\dfrac{x^2}{12^2} - \dfrac{y^2}{16^2} = 1}$ //

(2) $\{c_n\}$の初項は．$\sqrt{a_1 b_1} = 2$，$\{d_n\}$の初項は．$\sqrt{\dfrac{a_1}{b_1}} = 2$

$\therefore c_n = 2 + 2\cdot(n-1) = 2n$，$d_n = 2\cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n = \sqrt{a_n b_n}\cdot\sqrt{\dfrac{a_n}{b_n}} = c_n\cdot d_n = 4n\cdot 3^{n-1}$　　$\therefore \underline{a_5 = 1620}$ //

$b_n = \dfrac{\sqrt{a_n b_n}}{\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}} = \dfrac{c_n}{d_n} = \dfrac{2n}{2\cdot 3^{n-1}} = \dfrac{n}{3^{n-1}}$　　$\therefore \underline{b_5 = \dfrac{5}{81}}$ //

(3) $f(-x) = -f(x)$ より．$f(x)$：奇関数　$\therefore \underline{B = D = F = 0}$ //

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} Ax^2 + C + \frac{E}{x^2} = 6$　$\therefore \underline{A = 0,\ C = 6}$ //

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 6x^3 + Ex\,dx = \left[\frac{3}{2}x^4 + \frac{E}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{E}{2}$

$\therefore \dfrac{3+E}{2} = \dfrac{1}{2}$　　$\therefore \underline{E = -2}$ //