三重大学

2015年 医学部 第3問

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = e^{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) \geqq 0$ を示せ．また等号が成立するような x の値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ．

(1) $t=\sqrt{x}$ $(\geqq 0)$ とおいて $f(x)$ を t で表したものを $g(t)$ とすると

$$g(t) = e^{t-1} - t \quad (t \geqq 0)$$

$$\therefore g'(t) = e^{t-1} - 1$$

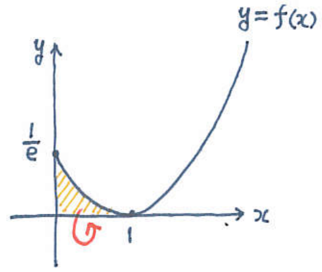
$\therefore g'(t) = 0$ となるのは $t=1$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

右の増減表より $t \geqq 0$ のとき $g(t) \geqq 0$ 等号成立は $t=1$

すなわち $f(x) \geqq 0$ ($x \geqq 0$ のとき) で，等号成立は $x=1$ ▨

(2) (1)より，$y=f(x)$ のグラフは右のようになる



$$\therefore V = \pi \int_0^1 (e^{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x})^2 \, dx$$

$t=\sqrt{x}$ とおいて置換積分する

$$dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \qquad \begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & 0 \to 1 \end{array}$$

$$V = \pi \int_0^1 (e^{t-1} - t)^2 \, 2t \, dt$$

$$= \pi \int_0^1 2t (e^{2t-2} - 2te^{t-1} + t^2) \, dt$$

$$= 2\pi \int_0^1 t \left(\frac{1}{2} e^{2t-2}\right)' dt - 4\pi \int_0^1 t^2 (e^{t-1})' dt + 2\pi \int_0^1 t^3 \, dt$$

$$= 2\pi \left[\frac{t}{2} e^{2t-2}\right]_0^1 - 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2t-2} dt - 4\pi \left[t^2 e^{t-1}\right]_0^1 + 4\pi \int_0^1 2t (e^{t-1})' dt + 2\pi \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} - \pi \left[\frac{1}{2} e^{2t-2}\right]_0^1 - 4\pi + 4\pi \left[2te^{t-1}\right]_0^1 - 4\pi \int_0^1 2e^{t-1} dt + 2\pi \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \pi - \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}\right) - 4\pi + 8\pi - 8\pi \left[e^{t-1}\right]_0^1 + \frac{\pi}{2}$$

$$= \underline{\pi\left(\frac{8}{e} + \frac{1}{2e^2} - 3\right)} \; //$$