

2014年医学部第4問

後半、計算大変!



4 関数  $f(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{4}x$  と  $g(x) = \frac{3}{4}x$  について、以下の問いに答えよ。ただし、 $0 \leq x \leq 2\pi$  とする。

(1)  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  のグラフの共有点を求めよ。

(2)  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  のグラフで囲まれた図形を、 $x$  軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

$$(1) \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x = 0 \quad \therefore \sin\left(\frac{3}{2}x\right) = 0$$

$$0 \leq \frac{3}{2}x \leq 3\pi \quad \therefore \frac{3}{2}x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \quad \therefore (0, 0), \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{4}{3}\pi, \pi\right)$$

$$\left(2\pi, \frac{3}{2}\pi\right) //$$

$$(2) f'(x) = \frac{3}{2} \cos \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{2} \left( \cos \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore f'(x) = 0 \text{ と } f(x) \text{ の } \frac{3}{2}x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi \quad \therefore x = \frac{4}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi$$

$$V = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \pi \left\{ \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{4}x \right\}^2 - \pi \left(\frac{3}{4}x\right)^2 dx$$

$$+ \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \pi \left(\frac{3}{4}x\right)^2 - \pi \left\{ \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{4}x \right\}^2 dx$$

$$+ \int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi} \pi \left\{ \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{4}x \right\}^2 - \pi \left(\frac{3}{4}x\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin^2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{2}x \sin\left(\frac{3}{2}x\right) dx$$

$$+ \pi \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} -\sin^2\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{3}{2}x \sin\left(\frac{3}{2}x\right) dx$$

$$+ \pi \int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi} \sin^2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{2}x \sin\left(\frac{3}{2}x\right) dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 3x}{2} dx + \frac{3}{2}\pi \int_0^{2\pi} x \left( -\cos\left(\frac{3}{2}x\right) \times \frac{2}{3} \right)' dx + 2\pi \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} -\frac{1 - \cos 3x}{2} - \frac{3}{2}x \cdot$$

$$= \pi \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 3x}{6} \right]_0^{2\pi} + \frac{3}{2}\pi \left[ -x \cdot \frac{2}{3} \cos\left(\frac{3}{2}x\right) \right]_0^{2\pi} + \frac{3}{2}\pi \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \cos\left(\frac{3}{2}x\right) dx \quad \left( -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{3}{2}x\right) \right)' dx$$

$$- 2\pi \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 3x}{6} \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} - 3\pi \left[ -\frac{2}{3}x \cos\left(\frac{3}{2}x\right) \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} + 3\pi \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} -\frac{2}{3} \cos \frac{3}{2}x dx = \frac{19}{3}\pi^2 //$$

$x$	0	...	$\frac{4}{9}\pi$	...	$\frac{8}{9}\pi$	...	$\frac{16}{9}\pi$	...	$2\pi$
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	0	-	-
$f(x)$	0		$\nearrow$		$\downarrow$		$\nearrow$		$\downarrow$ $\frac{3}{2}\pi$

$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{9}$      $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{9}$      $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{9}$   
 極大    極小    極大

