



2010年医学部第4問

4  $X$  を 2 次の正方行列として以下の問いに答えよ.

- (1)  $p, q$  を実数とし  $q \neq 0$  とする.  $\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}$  ならば,  $X$  は  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$  の形に表せることを示せ.
- (2)  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$  のとき, 自然数  $n$  に対し  $X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$  となることを数学的帰納法により示せ. ただし  $a^0 = 1$  とする.
- (3)  $m, n$  を自然数とする.  $X$  の各成分は 0 以上の整数で, さらに  $X^{n+1} - X^n = \begin{pmatrix} 2^{m+1} & 2^{50} \\ 0 & 2^{m+1} \end{pmatrix}$  を満たすものとする. このような行列  $X$  が存在するような組  $(m, n)$  をすべて求めよ.