2014年 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 関数

$$f(x)=\int_a^x (a+1-|t|)e^{-t}\,dt$$

を考える．次の問いに答えよ．ただし，aは正の定数とする．

(1) $x \geqq 0$ と $x \leqq 0$ の場合に，関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) $x \geqq 0$ のとき，関数 $f(x)$ の極値と変曲点を求めよ．

(3) $x \geqq 1$ のとき，$e^x > x^2$ となることを示せ．また，$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ とおくとき，$\lim_{x\to\infty} g(x) = \int_0^a |f(x)|\,dx$ をみたす a の値を求めよ．

(1) $x \geqq 0$ のとき．$f(x)=\int_a^x (a+1-t)e^{-t}dt$

$$=(a+1)\int_a^x e^{-t}dt - \int_a^x t(-e^{-t})'dt$$

$$=(a+1)\left[-e^{-t}\right]_a^x - \left[-te^{-t}\right]_a^x + \int_a^x -e^{-t}dt$$

$$=\underline{(x-a)e^{-x}}$$

$x \leqq 0$ のとき．$f(x) = -\int_x^a (a+1-|t|)e^{-t}dt$

$$=-\int_x^0 (a+1+t)e^{-t}dt - \int_0^a (a+1-t)e^{-t}dt$$

$$=-(a+1)\int_x^0 e^{-t}dt - \int_x^0 te^{-t}dt - (a+1)\int_0^a e^{-t}dt + \int_0^a te^{-t}dt$$

$$=\underline{-(x+a+2)e^{-x}+2}$$

(2) $x \geqq 0$ のとき．$f'(x) = e^{-x} + (x-a)\cdot(-e^{-x}) = (a-x+1)e^{-x}$

$f''(x) = -e^{-x} + (a-x+1)\cdot(-e^{-x}) = (x-a-2)e^{-x}$

右の増減表より

極大値 e^{-a-1} ($x=a+1$ のとき)

また，変曲点は $(a+2,\ 2e^{-a-2})$

x	0	…	$a+1$	…	$a+2$	…
$f'(x)$	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	−	0	+
$f(x)$	$-a$	↗	e^{-a-1}	↘	$2e^{-a-2}$	↘

極大

0001840639518999

宮城教育大学

2014年 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 関数

$$f(x)=\int_a^x (a+1-|t|)e^{-t}\,dt$$

を考える．次の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．

(1) $x \geqq 0$ と $x \leqq 0$ の場合に，関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) $x \geqq 0$ のとき，関数 $f(x)$ の極値と変曲点を求めよ．

(3) $x \geqq 1$ のとき，$e^x > x^2$ となることを示せ．また，$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ とおくとき，$\lim_{x\to\infty} g(x) = \int_0^a |f(x)|\,dx$ をみたす a の値を求めよ．

(3) $h(x) = e^x - x^2$ とおくと．

$h'(x) = e^x - 2x$

$h''(x) = e^x - 2$

∴ $x \geqq 1$ において，$h''(x) > 0$

∴ $h'(x)$：単調増加で，$h'(x) \geqq h'(1) = e-2 > 0$

∴ $h(x)$：単調増加で，$h(x) \geqq h(1) = e-1 > 0$

∴ $x \geqq 1$ において，$e^x > x^2$ ■

$$g(x) = \int_a^x (t-a)e^{-t}\,dt$$
$$= \Big[(t-a)\cdot(-e^{-t})\Big]_a^x - \int_a^x -e^{-t}\,dt$$
$$= -(x-a)e^{-x} + \Big[-e^{-t}\Big]_a^x$$
$$= \frac{a-1}{e^x} - \frac{x}{e^x} + e^{-a}$$

$x \geqq 1$ のとき．$e^x > x^2 \geqq x$ より

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = e^{-a}$$

$$\int_0^a |f(x)|\,dx = \int_0^a (a-x)e^{-x}\,dx = \Big[(x-a)e^{-x}\Big]_0^a - \int_0^a + e^{-x}\,dx$$
$$= a-1+e^{-a}$$

∴ $\lim_{x\to\infty} g(x) = \int_0^a |f(x)|\,dx$ となるのは $\underline{a=1}$ //