



2014年医(医)・歯・薬第4問

4  $p$  を素数とする。初項、公差がともに  $5p$  の等差数列を  $\{a_n\}$  とする。数列  $\{b_n\}$  は公差が  $p$  の等差数列で

$$\sum_{n=1}^p a_n = a_1 + a_p + 5 \sum_{n=1}^p b_n \text{ を満たす。}$$

- (1)  $b_1$  を求めよ。  
 (2)  $p=2$  のとき、 $\frac{a_n}{b_n}$  の値が自然数となるような  $n$  をすべて求めよ。  
 (3)  $p \geq 3$  とする。 $\frac{a_n}{b_n}$  の値が自然数となるような  $p$  と  $n$  の組  $(p, n)$  をすべて求めよ。

(1)  $a_n = 5pn$  で  $\{a_n\}, \{b_n\}$  はともに等差数列より

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p a_n = a_1 + a_p + 5 \sum_{n=1}^p b_n &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot p (5p + 5p^2) = 5p + 5p^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot p (b_1 + bp) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} p (p + p^2) = p + p^2 + \frac{1}{2} p \{2b_1 + (p-1) \cdot p\} \\ &\Leftrightarrow p(b_1 + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore p > 0 \text{ より, } \underline{b_1 = -1} //$$

(2)  $a_n = 10n, b_n = 2n-3$  より,  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{10n}{2n-3} = \frac{5(2n-3)+15}{2n-3} = 5 + \frac{15}{2n-3}$

$$\therefore 2n-3 \text{ は } 15 \text{ の約数となるから, } 2n-3 = -15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15$$

$$\text{このうち } \frac{a_n}{b_n} \text{ が自然数となるのは, } 2n-3 = -15, -5, 1, 3, 5, 15$$

$$\therefore n = -6, -1, 2, 3, 4, 9 \quad n \text{ は自然数より } \underline{n = 2, 3, 4, 9} //$$

(3)  $a_n = 5pn, b_n = pn - p - 1$  より,  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{5pn}{pn-p-1} = \frac{5(pn-p-1)+5p+5}{pn-p-1} = 5 + \frac{5(p+1)}{pn-p-1} \dots (*)$

$$\therefore 5p+5 \equiv pn-p-1 \text{ が成り立つことが必要 } \therefore n \leq 6 + \frac{6}{p}$$

$$p \geq 3 \text{ であるから, } n \leq 8$$

$n=1, 2, \dots, 8$  について  $(*)$  が自然数となる  $p$  を調べると,

$n=1$  のとき なし

$n=2$  のとき,  $p=3, 11$ ,  $n=3$  のとき,  $p=3$ ,  $n=4$  のとき  $p=7$

$n=5$  のとき, なし  $n=6$  のとき, なし  $n=7$  のとき, なし,  $n=8$  のとき  $p=3$

$$\text{以上より, } \underline{(p, n) = (3, 2), (3, 3), (3, 8), (7, 4), (11, 2)} //$$