

2015年工学部第3問

3 a を定数とし, $0 < a < \frac{\pi}{2}$ とする. 媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表される曲線を C とする. また, C の $0 \leq t \leq a$ の部分の長さを L とする.

(1) L を a を用いて表せ. ただし, L は $L = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ と表される.

(2) 曲線 C 上の点 $P(\cos^3 a, \sin^3 a)$ における接線 l の方程式を求めよ. また, l と x 軸の交点 Q の座標を求めよ.

(3) (2) の 2 点 P, Q 間の距離を M とするとき, $L = \frac{3}{2}M$ が成り立つことを示せ.