



2013年理系第3問

 数理
石井K

3 a を実数とし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -4 \\ -\frac{3a}{4} & 2 \end{pmatrix}$ は $A^3 = -a^2E$ を満たすとする. 次の問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
 (2) $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6$ を求めよ.
 (3) $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2011} + A^{2012} + A^{2013}$ を求めよ.

$$(1) A^2 = \begin{pmatrix} a & -4 \\ -\frac{3}{4}a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -4 \\ -\frac{3}{4}a & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3a & -4a-8 \\ -\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{2}a & 3a+4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a & -4 \\ -\frac{3}{4}a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2+3a & -4a-8 \\ -\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{2}a & 3a+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3+6a^2+6a & -4a^2-20a-16 \\ -\frac{3}{4}a^3-\frac{15}{4}a^2-3a & 3a^2+12a+8 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = -a^2E \iff \begin{cases} a^3+6a^2+6a = -a^2 \\ -4a^2-20a-16 = 0 \\ -\frac{3}{4}a^3-\frac{15}{4}a^2-3a = 0 \\ 3a^2+12a+8 = -a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a(a+1)(a+6) = 0 \\ (a+1)(a+4) = 0 \\ (a+1)(a+2) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \underline{a = -1} //$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}, A^3 = -E \text{ より,}$$

$$A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 = (E + A^3)(A + A^2 + A^3) \\ = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} //$$

(3) (2) より

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2013} = (A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6)(E + A^6 + A^{12} + A^{18} + \dots + A^{2004}) + A^{2011} + A^{2012} + A^{2013} \\ = A^{2011} + A^{2012} + A^{2013} \\ = (A^3)^{670} \cdot (A + A^2 + A^3) \\ = (-E)^{670} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ = \underline{\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}} //$$