会津大学

2012年 第6問

$\boxed{6}$ a, b を実数の定数として，2次の正方行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

と定める．自然数 n に対して A^n を推測し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$A^2=\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & a^2-b^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & a^2-b^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & a^3-b^3 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $A^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ と推測し，数学的帰納法で証明する

(i) $n=1$ のとき．$A^1=\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}$ となり成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき．成り立つと仮定すると．$A^k=\begin{pmatrix} a^k & a^k-b^k \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$ が成り立つ

$$\therefore A^{k+1}=\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^k & a^k-b^k \\ 0 & b^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & a^{k+1}-b^{k+1} \\ 0 & b^{k+1} \end{pmatrix}$$

となり．$n=k+1$ のときも成り立つ

(i)．(ii) より．自然数 n に対して．$A^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ となる． ▨