長崎大学

2014年 医学部 第3問

$\boxed{3}$ 曲線 $C: y = \log x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線を ℓ とする．ただし，$1 < t < e$ とする．e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 接線 ℓ と y 軸との交点を Q とし，接線 ℓ と x 軸との交点を R とする．Q と R の座標を求めよ．

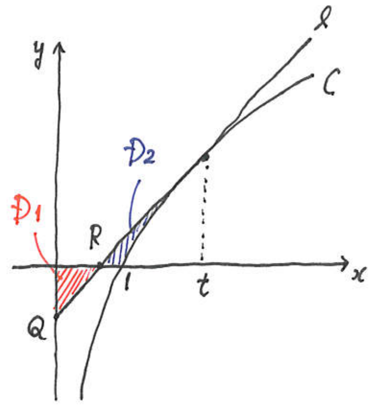
(3) 接線 ℓ と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D_1，接線 ℓ と曲線 C および x 軸によって囲まれた図形を D_2 とする．D_1 の面積 $S_1(t)$ と D_2 の面積 $S_2(t)$ を求めよ．

(4) $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とおく．このとき $S(t)$ の増減を調べ，その最小値およびそのときの t の値を求めよ．

(1) $y' = \frac{1}{x}$ より $\ell : y = \frac{1}{t}(x - t) + \log t$ $\therefore$ $\underline{\ell : y = \frac{1}{t}x - 1 + \log t}$ //

(2) $x = 0$ のとき $y = \log t - 1$ $\therefore$ $\underline{\mathrm{Q}(0,\ \log t - 1)}$ //

$y = 0$ のとき $\frac{1}{t}x = 1 - \log t$ $\therefore$ $\underline{\mathrm{R}(t - t\log t,\ 0)}$ //



(3) D_1：直角三角形より．

$S_1(t) = \frac{1}{2}(1 - \log t)\cdot(t - t\log t) = \underline{\frac{1}{2}t(1 - \log t)^2}$ //

$S_2(t) = \frac{1}{2}\{t - (t - t\log t)\}\cdot \log t - \int_1^t \log x\, dx$

$= \frac{1}{2}t(\log t)^2 - [x\log x]_1^t + \int_1^t dx$

$= \underline{\frac{1}{2}t(\log t)^2 - t\log t + t - 1}$ //

(4) (3) より $S(t) = \frac{1}{2}t(1 - 2\log t + (\log t)^2) + \frac{1}{2}t(\log t)^2 - t\log t + t - 1$

$= t(\log t)^2 - 2t\log t + \frac{3}{2}t - 1$

$\therefore$ $S'(t) = (\log t)^2 + t\cdot 2\log t\cdot\frac{1}{t} - 2\log t - 2 + \frac{3}{2}$

$= (\log t)^2 - \frac{1}{2}$

$1 < t < e$ より．$S'(t) = 0$ となるのは．$t = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\therefore$ $S(t)$ は $\underline{t = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\ のとき 最小値\ (2 - \sqrt{2})e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1}$ //

をとる．

t	(1)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\cdots$	(e)
$S'(t)$		$-$		$+$	
$S(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	