0002388721167999

長崎大学

2017年 経済・水産・環境科学部 第1問　　1枚目/2　　増田

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．

(1) △OABにおいて，辺OAを1：2に内分する点をMとし，辺OBを3：2に内分する点をNとする．また，線分ANと線分BMの交点をPとし，直線OPと辺ABの交点をQとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OP}$ および $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 連立不等式

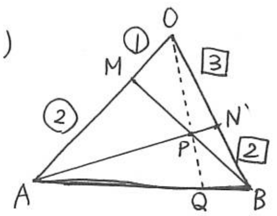
$$x+y\leqq 4,\quad y\leqq 2x+4,\quad y\geqq 0$$

の表す領域と放物線 $y=x^2-6x+k$ が共有点をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ．

(3) $a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ および数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$\sin^4\theta+\cos^4\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ．

(1)



△OANと直線BMにおいてメネラウスの定理より

$$\frac{OM}{MA}\frac{AP}{PN}\frac{NB}{BO}=1$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{AP}{PN}\cdot\frac{2}{5}=1$$

$$AP:PN=5:1$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{ON}}{5+1}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\vec{b}\right)$$

$$=\underline{\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}\ //$$

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ とおく。Qは直線AB上の点なので，

$$\frac{1}{6}k+\frac{1}{2}k=1$$

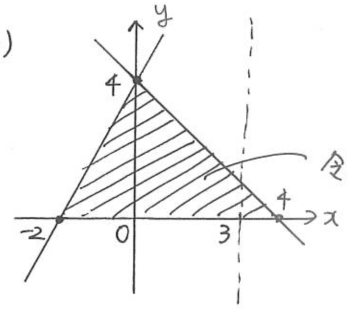
$$\frac{4}{6}k=1$$

$$k=\frac{3}{2}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$=\underline{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}}\ //$$

(2)



$y=x^2-6x+k$
$=(x-3)^2+k-9$

領域Aと呼ぶ

領域Aと，$x=3$ を軸とする放物線が共有点をもつのは，

i) $(x,y)=(-2,0)$ を通るとき k 最小

ii) $x+y=4$ と接するとき k 最大

となる。

i) $(x,y)=(-2,0)$ を通るとき

$$0=(-2-3)^2+k-9$$

$$k=9-25=-16$$

ii) $x+y=4$ と接するとき，

$y=4-x$ を代入して

$$4-x=(x-3)^2+k-9$$

$$x^2-5x+k-4=0$$

判別式 $D=25-4(k-4)=0$

$$\therefore k=\frac{41}{4}$$

i), ii) より求める k の範囲は $\underline{-16\leqq k\leqq\frac{41}{4}}\ //$

0002388721167999

長崎大学

2017年 経済・水産・環境科学部 第1問

2枚目/2

増田

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．

(1) △OABにおいて，辺OAを1：2に内分する点をMとし，辺OBを3：2に内分する点をNとする．また，線分ANと線分BMの交点をPとし，直線OPと辺ABの交点をQとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OP}$ および $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 連立不等式

$$x+y \leqq 4,\quad y \leqq 2x+4,\quad y \geqq 0$$

の表す領域と放物線 $y=x^2-6x+k$ が共有点をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ．

(3) $a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=1$（$n=1$，2，3，…）で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．$b_n=a_{n+1}-a_n$（$n=1$，2，3，…）とおくとき，数列 $\{b_n\}$ および数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\sin^4\theta+\cos^4\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ．

(3) $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n$

$= a_{n+2}-a_{n+1}-(a_{n+1}-a_n)$

$= b_{n+1}-b_n=1$

b_n は初項 $a_2-a_1=0$，公差1の等差数列となる。

$\underline{b_n=n-1}$ //

また，$a_{n+1}-a_n=n-1$ で a_n は階差数列となり，

$$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)$$

$$= 1+\frac{n-1}{2}(0+n-2)$$

$$= \underline{\frac{n^2-3n+4}{2}} \ //$$

(4) $\sin^4\theta+\cos^4\theta$

$= (\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 1-2\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2$

$= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$0<\sin^2 2\theta<1$ より，

$\underline{最大値は\ 1}$ //

そのとき $\sin^2 2\theta=0$ より $\underline{\theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi}$ //

$\underline{最小値は\ \frac{1}{2}}$ //

そのとき $\sin^2 2\theta=1$ より $\underline{\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi}$ //