



2010年第5問

5  $a, b$  を  $a > b > 0$  を満たす定数とし,

$$\begin{cases} a_1 = a, & a_{n+1} = a_n^2 + b_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_1 = b, & b_{n+1} = 2a_n b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

で定義される数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  を考える. 次の問いに答えよ.

- (1) 数列  $\{c_n\}$  を  $c_n = a_n + b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) により定義するとき, その一般項  $c_n$  を  $a, b$  を用いて表せ.
- (2) 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  の一般項  $a_n, b_n$  を  $a, b$  を用いて表せ.
- (3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$  が存在するかどうかを調べ, 存在する場合はその値を求めよ.
- (4) 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が収束するとき,  $a + b < 1$  が成り立つことを証明せよ.