

2015年第3問

3 e を自然対数の底とし, t を $t > e$ となる実数とする. このとき, 曲線 $C : y = e^x$ と直線 $y = tx$ は相異なる2点で交わるので, 交点のうち x 座標が小さいものをP, 大きいものをQとし, P, Qの x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$)とする. また, Pにおける C の接線とQにおける C の接線との交点をRとし, 曲線 C , x 軸および2つの直線 $x = \alpha, x = \beta$ で囲まれる部分の面積を S_1 , 曲線 C および2つの直線PR, QRで囲まれる部分の面積を S_2 とする. このとき, 次の間に答えよ.

- (1) $\frac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ.
- (2) $\alpha < \frac{e}{t}, \beta < 2\log t$ となることを示し, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ. 必要ならば, $x > 0$ のとき $e^x > x^2$ であることを証明なしに用いてよい.