0001792727028999

名古屋工業大学

2014年 工学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $r \neq 1$ のとき $S_n = r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + nr^n$ を求めよ．

(2) $x > 0$ に対して

$$f_n(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + \cdots + ne^{-nx}$$

とおく．極限 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．ただし $\lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0$ であることを用いてもよい．

(3) (2) で得られた関数 $f(x)$ について，不定積分 $\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(4) (2) で得られた関数 $f(x)$ について，定積分 $\int_{\log 2}^{\log 3} xf(x)\,dx$ を求めよ．

(1)
$$
\begin{array}{rl}
S_n = & r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + nr^n \\
-)\ rS_n = & \quad\ r^2 + 2r^3 + \cdots + (n-1)r^n + nr^{n+1} \\
\hline
(1-r)S_n = & r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n - nr^{n+1}
\end{array}
$$

$r \neq 1$ より．$(1-r)S_n = \dfrac{r(1-r^n)}{1-r} - nr^{n+1}$

$$\therefore S_n = \frac{r\{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}\}}{(1-r)^2} \text{ //}$$

(2) (1) の r に $r = e^{-x}$ を代入する ($x>0$ より．$e^{-x} \neq 1$)

$$\therefore f_n(x) = \frac{e^{-x}\{1-(n+1)e^{-nx} + ne^{-(n+1)x}\}}{(1-e^{-x})^2}$$

$\lim_{n\to\infty} ne^{-n} = 0$ より．$f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$ //

(3)
$$\int f(x)\,dx = \int \{-(e^x-1)^{-1}\}'\,dx$$
$$= \frac{1}{1-e^x} + C \quad (C\text{は積分定数}) \text{ //}$$

(4)
$$\int_{\log 2}^{\log 3} xf(x)\,dx = \int_{\log 2}^{\log 3} x\cdot\{-(e^x-1)^{-1}\}'\,dx$$
$$= \left[-x\cdot\frac{1}{e^x-1}\right]_{\log 2}^{\log 3} + \int_{\log 2}^{\log 3}\frac{dx}{e^x-1}$$
$$= -\frac{1}{2}\log 3 + \log 2 + \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t+1}\,dt$$

$t = e^x - 1$ とおいて置換積分

$$= -\frac{1}{2}\log 3 + \log 2 + \Big[\log t - \log(t+1)\Big]_1^2$$
$$= -\frac{1}{2}\log 3 + \log 2 + \log 2 - \log 3 + \log 2$$
$$= 3\log 2 - \frac{3}{2}\log 3 \text{ //}$$