

2013年薬学部第2問

2 逆行列をもつ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって表される1次変換を考える。以下の問いに答えよ。

(1) この変換によって xy 平面上の任意の2点 $P(x_1, y_1)$ および $Q(x_2, y_2)$ がそれぞれ $P'(x_1', y_1')$ および $Q'(x_2', y_2')$ に移されるとき、2点間の距離が変換によって変化しない、つまり、 $|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{P'Q'}|^2$ であるための必要十分条件は、

$$A^T A = E \quad \dots\dots(*)$$

であることを示せ。ただし、 A^T は A の行と列を入れ替えた行列要素をもつ行列、すなわち、

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

である。また、 E は単位行列である。

- (2) 原点のまわりの回転移動および x 軸に関する対称移動の1次変換を、それぞれ、 f および g とする。これらの1次変換を表す行列は、それぞれ、上の条件(*)を満たすことを確かめよ。
- (3) (2) で考えた1次変換 f および g を表す行列をそれぞれ F および G とし、 $A = FGF^{-1}$ で定義される行列 A によって表される1次変換を考える。この変換によって直線 $y = mx$ 上の任意の点がそれ自身に移されるとき、 A を実数 m を用いて表せ。ただし、 F^{-1} は F の逆行列を表す。
- (4) (1) で考えた点 P, Q, P', Q' の座標を用いて、 $S = x_1 y_2 - y_1 x_2$ および $S' = x_1' y_2' - y_1' x_2'$ を定義する。 P, Q から P', Q' への変換を表す行列が(3)で求めた A で与えられるとき、 S と S' の関係式を求めよ。