奈良女子大学

2014 年 第 4 問

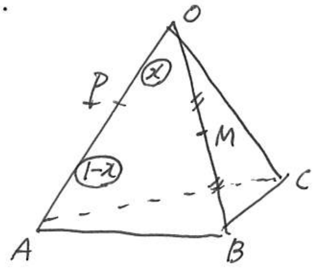
数理 石井K

$\boxed{4}$ 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA を $x:(1-x)$ に内分する点を P，辺 OB の中点を M とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{CM}$ を $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

(2) 直線 CM 上に，$\overrightarrow{CQ}=y\overrightarrow{CM}$ となる点 Q をとる．$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{CM}$ が垂直であるとき，y を x を用いて表せ．

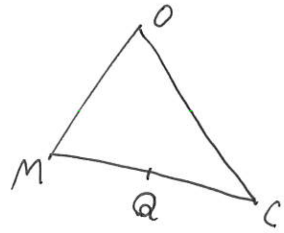
(3) x が $0<x<1$ の範囲を動くとき，三角形 CMP の面積の最小値を求めよ．



(1) $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}$

$=\underline{\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}}$ //

(2) (1) より．$\overrightarrow{CQ}=\frac{y}{2}\overrightarrow{OB}-y\overrightarrow{OC}$



$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CQ}-\overrightarrow{CP}$

$=\frac{y}{2}\overrightarrow{OB}-y\overrightarrow{OC}-(-\overrightarrow{OC}+x\overrightarrow{OA})$

$=-x\overrightarrow{OA}+\frac{y}{2}\overrightarrow{OB}+(1-y)\overrightarrow{OC}$

ここで $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}$ より．

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{CM} \iff \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CM}=0$

$\therefore \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CM}=-\frac{1}{2}x\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{y}{4}|\overrightarrow{OB}|^2$
$+\frac{1}{2}(1-y)\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+x\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$
$-\frac{y}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-(1-y)|\overrightarrow{OC}|^2$
$=\frac{1}{4}(x+3y-3)$

$\therefore x+3y-3=0$

$\therefore \underline{y=-\frac{1}{3}x+1}$ //

(3) $S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{MP}|^2|\overrightarrow{MC}|^2-(\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MC})^2}$ …①

(1) より．

$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ $\quad\therefore |\overrightarrow{MP}|^2=x^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x$ $\quad |\overrightarrow{MC}|^2=\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MC}=-\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+x\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{4}$

$\therefore x=\frac{3}{11}$ のとき．

$\therefore$ ①より $S=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})-(\frac{x}{4})^2}=\frac{1}{8}\sqrt{11(x-\frac{3}{11})^2+\frac{24}{11}}$ $\quad$ 最小値 $\underline{\frac{\sqrt{66}}{44}}$ //