



2015年現代心理(心理)・コミュ(コミュ)・観光(交流)・経営第2問

2 座標平面上に2つの放物線 $C_1: y = x^2$ と $C_2: y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) がある。この2つの放物線 C_1 と C_2 が $x = -1$ で交わり、その点で各々の接線が直交するとき、次の問に答えよ。

- (1) b, c をそれぞれ a を用いて表せ。
 (2) 2つの放物線 C_1 と C_2 が、さらに $x = \frac{1}{4}$ で交わる時の a の値を求めよ。
 (3) a を (2) で求めた値とするとき、放物線 C_2 の $x = -1$ での接線 l_1 、 $x = \frac{1}{4}$ での接線 l_2 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) 交点 l_1 が $(-1, 1)$ より、 $1 = a - b + c \cdots \textcircled{1}$

C_1 において、 $y' = 2x$ 、 C_2 において $y' = 2ax + b$

∴ 交点における接線の傾きは、それぞれ、 -2 と $-2a + b$

∴ $-2a + b = \frac{1}{2} \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より、 $b = 2a + \frac{1}{2}$ 、 $c = a + \frac{3}{2}$ "

(2) 交点 l_2 が $(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$ より、

$\frac{1}{16} = \frac{1}{16}a + \frac{1}{4}b + c$

(1) の結果を代入すると、 $a = -1$ "

(3) $C_2: y = -x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ より、

$y' = -2x - \frac{3}{2}$

∴ $l_1: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 、 $l_2: y = -2x + \frac{9}{16}$

∴ l_1 と l_2 の交点の x 座標を求めると、 $x = -\frac{3}{8}$

∴ $S = \int_{-1}^{-\frac{3}{8}} \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - (-x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \right) dx + \int_{-\frac{3}{8}}^{\frac{1}{4}} \left(-2x + \frac{9}{16} - (-x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \right) dx$

$= \int_{-1}^{-\frac{3}{8}} (x+1)^2 dx + \int_{-\frac{3}{8}}^{\frac{1}{4}} (x - \frac{1}{4})^2 dx$

$= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-1}^{-\frac{3}{8}} + \left[\frac{1}{3}(x - \frac{1}{4})^3 \right]_{-\frac{3}{8}}^{\frac{1}{4}}$

$= \frac{125}{768}$ "

