2014 年 第 2 問

$\boxed{2}$ 座標平面上の点 $(x,\ y)$ に対し $f(x,\ y)$, $g(x,\ y)$ を次で定める.

$$f(x,\ y)=(x-3)^2+y^2-4$$

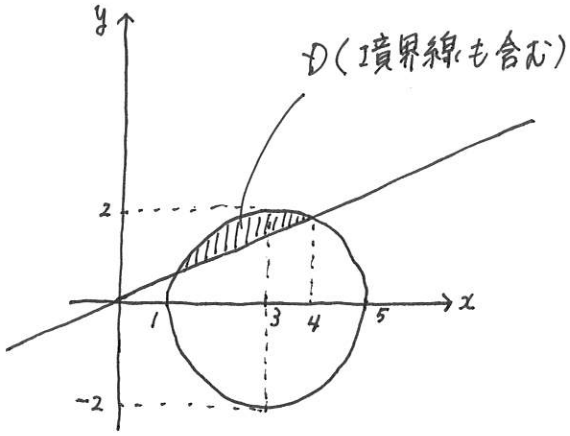
$$g(x,\ y)=\sqrt{3}x-4y$$

以下の問いに答えよ.

(1) 連立不等式

$$f(x,\ y)\leqq 0,\quad g(x,\ y)\leqq 0$$

の表す領域を D とする. D を図示せよ.



(2) 円 $f(x,\ y)=0$ と直線 $g(x,\ y)=0$ の交点において, 円 $f(x,\ y)=0$ と接する直線の方程式を求めよ.

(3) D を (1) で定めた領域とする. 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき, $ax+y$ の最大値, 最小値を求めよ. ただし, a は正の定数である.

(2) (1)より交点は2個あり. $(x-3)^2+\frac{3}{16}x^2-4=0$

これを解くと. $x=4,\ \frac{20}{19}$ ∴交点は $(4,\sqrt{3})$ と $\left(\frac{20}{19},\frac{5\sqrt{3}}{19}\right)$

∴それぞれにおける接線は. $x+\sqrt{3}y=7$, $37x-5\sqrt{3}y=35$ //

(3) $ax+y=k$ とおくと. 最小値は. $\left(\frac{20}{19},\frac{5\sqrt{3}}{19}\right)$ を通るときで

$\frac{20}{19}a+\frac{5\sqrt{3}}{19}=k$ ∴最小値は $\frac{20a+5\sqrt{3}}{19}$ $\left(x=\frac{20}{19},\ y=\frac{5\sqrt{3}}{19}\text{ のとき}\right)$ //

一方, 最大値は a の値によって次の場合に分けられる.

(i) $0<a\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき.

$ax+y=k$ が D の円弧部分に接するときで,

$(x-3)^2+(k-ax)^2-4=0$ ∴ $D/4=(3+ak)^2-(a^2+1)(k^2+5)=0$

∴ $k^2-6ak+5a^2-4=0$ ∴ $k=3a\pm2\sqrt{a^2+1}$

このうち. D で接するのは. $k=3a+2\sqrt{a^2+1}$

(ii) $a>\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき. 最大値をとるのは. $(4,\sqrt{3})$ をとおるとき.

∴ $k=4a+\sqrt{3}$

(i),(ii)より 最大値は $\begin{cases} 3a+2\sqrt{a^2+1} & \left(0<a\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ のとき}\right) \\ 4a+\sqrt{3} & \left(a>\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ のとき}\right)\end{cases}$ //