山形大学

2014年 理学部（数理） 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 座標平面上の1次変換 f は点 $(1,\ 2)$ を点 $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3},\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ に，点 $(3,\ 4)$ を点 $\left(\frac{3}{2}-2\sqrt{3},\ 2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ に移すとする．O を原点として，次の問に答えよ．

(1) 1次変換 f を表す行列 A を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ が f により点Qに移るとき，$\angle\mathrm{POQ}$ を求めよ．また線分OQの長さを求めよ．

(3) 点Rを $(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ で定める $\left(0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$．$f$ により，点Rは点Sに，点Sは点Tに，点Tは点Uに，点Uは点Vに移るとする．

(i) 三角形ORSの面積を求めよ．

(ii) 点 $(2,\ 0)$ と点R，S，T，U，Vを頂点とする六角形の面積 $H(\theta)$ の最大値と，そのときの θ の値を求めよ．

(1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと．$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\sqrt{3} \\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ よって $\begin{cases} a+2b=\frac{1}{2}-\sqrt{3} & \cdots ① \\ c+2d=1+\frac{\sqrt{3}}{2} & \cdots ② \end{cases}$

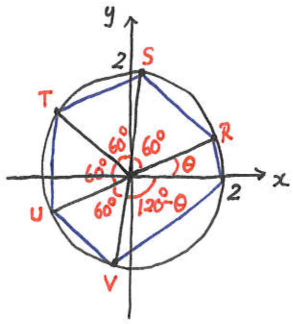
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-2\sqrt{3} \\ 2+\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ よって $\begin{cases} 3a+4b=\frac{3}{2}-2\sqrt{3} & \cdots ③ \\ 3c+4d=2+\frac{3\sqrt{3}}{2} & \cdots ④ \end{cases}$

③ − ①×2 より $a=\frac{1}{2}$ $\therefore b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ − ②×2 より $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore d=\frac{1}{2}$

$\therefore A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ //

(2) Aは原点のまわりに $+60°$ 回転させる行列なので，$\angle\mathrm{POQ}=60°$，$\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}=1$ //

(3)(i) 右の図より．$\triangle\mathrm{ORS}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\sin60°=\sqrt{3}$ //



(ii) 右の図より．$H(\theta)=\sqrt{3}\cdot4+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\sin(120°-\theta)$

$=3\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+4\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)+4\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+4\sqrt{3}$

よって．$0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より $H(\theta)$ の最大値は $6\sqrt{3}$ $\left(\theta=\frac{\pi}{3}\text{のとき}\right)$ //