# 大分大学

2014年 経済学部 第1問

$f(x) = x^3 + 2kx^2 + kx^2 + 2k^2x$

数理 石井K

$\boxed{1}$ $k>0$ とし，$f(x)=x(x+k)(x+2k)$ とおく．曲線 $y=f(x)$ を $C$ とする．

(1) 関数 $f(x)$ は異なる2つの極値をもつことを示しなさい．

(2) 曲線 $C$ 上の極値をとる点を P，Q とする．線分 PQ の中点 R の座標を求めなさい．

(3) 点 R が曲線 $C$ 上にあることを示し，点 R における曲線 $C$ の接線の方程式を求めなさい．

(1) $f(x)=(x^2+kx)(x+2k)$ より $f'(x)=(2x+k)(x+2k)+(x^2+kx)$

$= 3x^2+6kx+2k^2$

$f'(x)=0$ の判別式を $D$ とすると，$D/4 = 9k^2-3\cdot 2k^2 = 3k^2>0$

$\therefore$ $f'(x)=0$ は異なる2つの実数解 $\alpha, \beta$ $(\alpha<\beta)$ をもち

$f'(x)$ の正負は $x=\alpha, \beta$ の前後で変化する

$\therefore$ 2つの極値 $f(\alpha), f(\beta)$ をもつ ▨

(2) 解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-2k$，$\alpha\beta=\frac{2}{3}k^2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4k^2-\frac{4}{3}k^2$

$=\frac{8}{3}k^2$

$\therefore$ $P(\alpha, f(\alpha))$，$Q(\beta, f(\beta))$ の中点 R は

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=-8k^3-2k^2\cdot(-2k)$

$=-4k^3$

$R\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^3+3k\alpha^2+2k^2\alpha+\beta^3+3k\beta^2+2k^2\beta}{2}\right)$

$=\left(-k,\ \frac{-4k^3+3k\cdot\frac{8}{3}k^2+2k^2\cdot(-2k)}{2}\right)=\underline{(-k,\ 0)}$ //

(3) $f(-k)=0$ より，R は $C$ 上にある ▨

接線は $y=(3k^2-6k^2+2k^2)(x+k)$

$\therefore$ $\underline{y=-k^2x-k^3}$ //