大分大学

2010 年 医学部 第 3 問

3 微分可能な関数 $y=f(x)$ が次の方程式を満たすとする．

$$a_n f^{(n)}(x)+a_{n-1}f^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1 f^{(1)}(x)+a_0 f(x)=0 \qquad \text{(A)}$$

ここに n は自然数，a_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ は実数の定数で，$a_n \neq 0$ である．また，$y^{(k)}=f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の k 次導関数で $y^{(0)}=f^{(0)}(x)=f(x)$ とする．(A) のような方程式を第 n 階微分方程式といい，(A) に対して t の n 次方程式

$$a_n t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1 t+a_0=0 \qquad \text{(B)}$$

を (A) の特性方程式という．このとき次の問いに答えよ．

（1）特性方程式 (B) の解が実数 r であるとき，関数 $y=e^{rx}$ が方程式 (A) を満たすことを証明せよ．

（2）n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解（注）にもつとき，次の t に関する方程式は r を $k-1$ 重解にもつことを証明せよ．ただし，$k=2,\ 3,\ \cdots$ とする．

$$na_n t^{n-1}+(n-1)a_{n-1}t^{n-2}+\cdots+2a_2 t+a_1=0$$

(注)　t の m 次方程式が適当な多項式 $Q(t)$ を用いて $(t-r)^k Q(t)=0$ となるとき，$t=r$ をこの方程式の k 重解と定義する．ただし，$k=1,\ 2,\ \cdots$ とする．

（3）実数の定数 r に対して x の関数を $y_i=x^i e^{rx}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ とする．このとき，$y_j^{(n)}$ を x，$y_{j-1}^{(n-1)}$ および $y_{j-1}^{(n)}$ を用いて表せ．ただし，$j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とする．

（4）実数 r が n 次方程式 (B) の k 重解であるとき $y_i=x^i e^{rx}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$ が微分方程式 (A) を満たすことを証明せよ．ただし，k は自然数とする．