愛媛大学

2015年農・工（環境建設）・教育・総合人間 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ aを自然数とし，関数$f(x)=x^3+2x^2+ax+4$は$x=x_1$で極大，$x=x_2$で極小になるものとする．また，曲線$y=f(x)$上の2点P$(x_1,\ f(x_1))$，Q$(x_2,\ f(x_2))$の中点をRとする．

(1) $a=1$であることを示せ．

(2) 点Pおよび点Qの座標を求めよ．

(3) 点Rは曲線$y=f(x)$上にあることを示せ．

(4) 点Rにおける曲線$y=f(x)$の接線は，点R以外に$y=f(x)$との共有点をもたないことを示せ．

(1) $f'(x)=3x^2+4x+a$

$f(x)$が極大値と極小値をもつことより.

$f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつ. よって判別式をDとおくと.

$D=16-4\cdot 3a=4(4-3a)>0$ ∴ aは自然数 より $a=1$

逆に, $a=1$のとき. $f'(x)=(3x+1)(x+1)$ となり

増減表は右のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{104}{27}$	$\nearrow$

∴ 極大値, 極小値をもつ ▨

(2) (1)より $a=1$, $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{3}$

∴ $\underline{P(-1,4),\ Q\left(-\frac{1}{3},\ \frac{104}{27}\right)}$ //

(3) (2)より. $R\left(-\frac{2}{3},\ \frac{106}{27}\right)$ となる

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}+\frac{8}{9}-\frac{2}{3}+4=\frac{106}{27}$ となり 点Rは$y=f(x)$上にある ▨

(4) 接線をlとおくと, $f'\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+1=-\frac{1}{3}$ より

$l: y=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{106}{27}$ ∴ $l: y=-\frac{1}{3}x+\frac{100}{27}$

∴ $g(x)=x^3+2x^2+x+4-\left(-\frac{1}{3}x+\frac{100}{27}\right)$ とおくと

$g(x)=x^3+2x^2+\frac{4}{3}x+\frac{8}{27}$

$=\left(x+\frac{2}{3}\right)^3$

∴ $g(x)=0$ となるのは $x=-\frac{2}{3}$ のときのみ

すなわち. lは点R以外に$y=f(x)$と共有点をもたない ▨