2014年 理系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標平面において，行列 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$ の表す一次変換を f とする．

(1) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，点 $\mathrm{P}(2+\cos\theta,\ \sin\theta)$ を f で移した点Qの座標を求めよ．

(2) 不等式 $a_1\leqq x\leqq a_2$，$b_1\leqq y\leqq b_2$ の表す領域を T とする．$0\leqq\theta<2\pi$ を満たすすべての θ に対して，(1)で求めた点Qが領域 T に入るとする．T の面積が最小となるときの a_1，a_2，b_1，b_2 を求めよ．

(3) 不等式 $(x-2)^2+(y-4)^2\leqq r^2$ の表す領域を H とする．$0\leqq\theta<2\pi$ を満たすすべての θ に対して，(1)で求めた点Qが領域 H に入るとする．このとき，正の数 r の最小値を求めよ．

(1) $\mathrm{Q}(x,y)$ とおくと．$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2+\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\cos\theta\\4+2\cos\theta+3\sin\theta\end{pmatrix}$

$\therefore\ \underline{\mathrm{Q}(2+\cos\theta,\ 4+2\cos\theta+3\sin\theta)}$ //

(2) $x=2+\cos\theta$，$y=4+2\cos\theta+3\sin\theta$ とおくと．

$0\leqq\theta<2\pi$ において，$1\leqq x\leqq 3$ $\quad\therefore\ \underline{a_1=1,\ a_2=3}$ //

$y=4+\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$ より．$4-\sqrt{13}\leqq y\leqq 4+\sqrt{13}$ $\quad\therefore\ \underline{b_1=4-\sqrt{13},\ b_2=4+\sqrt{13}}$ //

(3) $\mathrm{R}(2,4)$ とおくと．QとRとのキョリ d は

$$d=\sqrt{\cos^2\theta+(2\cos\theta+3\sin\theta)^2}$$

$$=\sqrt{5\cos^2\theta+12\cos\theta\sin\theta+9\sin^2\theta}$$

$\sqrt{\ }$ の内身を $D(\theta)$ とおくと．

$$D(\theta)=5\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+6\sin2\theta+9\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}$$

$$=-2\cos2\theta+6\sin2\theta+7$$

$$=2\sqrt{10}\sin(2\theta+\beta)+7$$

$\therefore\ D(\theta)$ の最大値は $7+2\sqrt{10}$

$\therefore\ d$ の最大値は $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ $\quad\therefore\ \underline{r=\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ //