0001973366208999

大阪大学

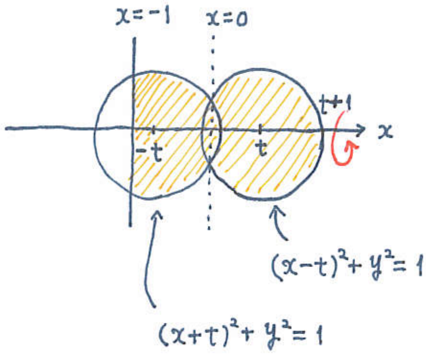
2015年 理系 第4問

$\boxed{4}$ 座標空間のx軸上に動点P，Qがある．P，Qは時刻0において，原点を出発する．Pはx軸の正の方向に，Qはx軸の負の方向に，ともに速さ1で動く．その後，ともに時刻1で停止する．点P，Qを中心とする半径1の球をそれぞれA，Bとし，空間で$x \geqq -1$の部分をCとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 時刻t $(0 \leqq t \leqq 1)$における立体$(A \cup B) \cap C$の体積$V(t)$を求めよ．

(2) $V(t)$の最大値を求めよ．

(1) $(A \cup B) \cap C$ は右図の斜線部分を x軸のまわりに1回転したものなので



$$V(t) = \pi\int_{-1}^{0} 1-(x+t)^2\,dx + \pi\int_{0}^{t+1} 1-(x-t)^2\,dx$$

$$= \pi\left[x - \frac{1}{3}(x+t)^3\right]_{-1}^{0} + \pi\left[x - \frac{1}{3}(x-t)^3\right]_{0}^{t+1}$$

$$= \pi\left\{-\frac{1}{3}t^3 + 1 + \frac{1}{3}(-1+t)^3\right\} + \pi\left\{t+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}t^3\right\}$$

$$= \underline{\left(-\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t + \frac{4}{3}\right)\pi}\ //$$

(2) $V'(t) = (-t^2-2t+2)\pi$

$0 \leqq t \leqq 1$ より $V'(t)=0$ となるのは．$t=\sqrt{3}-1$ のとき．

t	0	…	$\sqrt{3}-1$	…	1
$V'(t)$		+	0	−	
$V(t)$	$\frac{4\pi}{3}$	↗		↘	2π

$\alpha = \sqrt{3}-1$ とおくと．$V'(\alpha)=0$ となることより

$\alpha^2 + 2\alpha - 2 = 0$　　$\therefore \alpha^2 = -2\alpha + 2$

これを使って．$V(\alpha)$ を計算すると．

$$V(\alpha) = \left\{-\frac{1}{3}\alpha\cdot(-2\alpha+2) - (-2\alpha+2) + 2\alpha + \frac{4}{3}\right\}\pi$$

$$= \left\{\frac{2}{3}(-2\alpha+2) + \frac{10}{3}\alpha - \frac{2}{3}\right\}\pi$$

$$= \left(2\alpha + \frac{2}{3}\right)\pi$$

$$= \underline{\left(2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\right)\pi}\ //$$