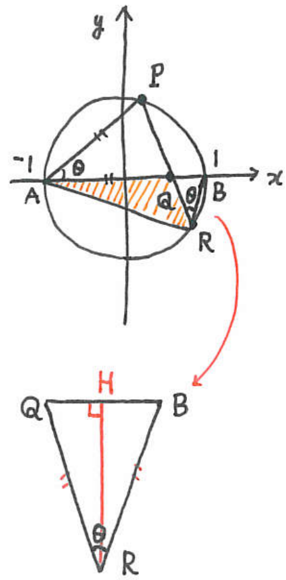
2015年 文系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 平面上に長さ2の線分ABを直径とする円 C がある．2点A，Bを除く C 上の点Pに対し，AP = AQとなるように線分AB上の点Qをとる．また，直線PQと円 C の交点のうち，Pでない方をRとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) △AQRの面積を $\theta = \angle \mathrm{PAB}$ を用いて表せ．

(2) 点Pを動かして△AQRの面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ．



(1) AP = AQ より，$\angle \mathrm{PQA} = \dfrac{\pi - \theta}{2}$

△APQ ∽ △RBQ より，$\angle \mathrm{RBQ} = \dfrac{\pi-\theta}{2}$

また，ABは直径より $\angle \mathrm{ARB} = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \mathrm{BR} = 2\cos\dfrac{\pi-\theta}{2}$

∴ 右図の $\mathrm{HR} = \mathrm{BR}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$= 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}\right)\cos\dfrac{\theta}{2}$

$= \sin\theta$

$\therefore \triangle \mathrm{AQR} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot \sin\theta - \dfrac{1}{2}\cdot 4\cos^2\dfrac{\pi-\theta}{2}\sin\theta$

$= \sin\theta - \sin\theta(1-\cos\theta)$

$= \underline{\sin\theta\cos\theta}$ //

(2) (1)より，$\triangle\mathrm{AQR} = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ 　∴△AQRが最大となるのは $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき．

このとき，P(0, 1)，B(1, 0)，A(−1, 0)

$\mathrm{AP} = \sqrt{2}$ より，$\mathrm{Q}(\sqrt{2}-1, 0)$ 　$\therefore \mathrm{R}\left(\sqrt{2}-1+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1, 1)$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AR}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおくと，$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \underline{\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}}$ //