0001737092628999

大阪府立大学

2014年 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

3 a, bを定数とし，2次の正方行列A, X, Yは

$$A = aX + bY, \quad X + Y = E, \quad XY = O$$

をみたすとする．ここで，EとOはそれぞれ2次の単位行列と零行列を表す．このとき，$X+Y=E$の両辺に左からXを掛けると$X^2 = X$が成り立つことがわかる．

(1) $Y^2 = Y$, $YX = O$が成り立つことを示せ．

(2) AがEの定数倍ではないとき，$A - aE$と$A - bE$はともに逆行列をもたないことを示せ．

(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$のとき，$a$, b $(a<b)$およびX, Yを求めよ．

(1) $X+Y=E$ の両辺に右から Y をかけると，$XY+Y^2=Y$　∴ $XY=O$ より

$Y^2=Y$ が成り立つ．また，$X+Y=E$ の左から Y をかけると，

$YX+Y^2=Y$ となり，$Y^2=Y$ より，$YX=O$ が成り立つ ▨

(2) 背理法で示す．$A-aE$ の逆行列が存在すると仮定する，このとき．

$$\begin{aligned} A-aE &= aX+bY-aE \\ &= aX+b(E-X)-aE \\ &= (a-b)X-(a-b)E \\ &= (a-b)(X-E) \\ &= (b-a)Y \end{aligned}$$

ここで，AはEの実数倍ではないので，$A-aE \neq O$　∴ $b-a \neq 0$

∴ $Y = \frac{1}{b-a}(A-aE)$ となるので，Y^{-1}は存在して，$Y^{-1}=(b-a)(A-aE)^{-1}$

∴ $Y^2=Y$ の両辺に Y^{-1} をかけて．$Y=E$ となる　このとき．$X=O$ なので

$A=bE$　これは AはEの実数倍でないことに反する　∴ 矛盾．

∴ $A-aE$ は逆行列をもたない ▨

同様に，$A-bE=(a-b)X$　AはEの実数倍でないので，$A-bE \neq O$　∴ $a-b \neq 0$

∴ $X = \frac{1}{a-b}(A-bE)$ となり，X^{-1}は存在し，$X^{-1}=(a-b)(A-bE)^{-1}$

$X^2=X$ の両辺に X^{-1} をかけて．$X=E$，$Y=O$　∴ $A=aE$ となり矛盾　∴ $A-bE$は逆行列をもたない ▨

大阪府立大学

2014年 第3問　2枚目／2枚

数理 石井K

3 a, bを定数とし，2次の正方行列 A, X, Y は

$$A = aX + bY, \quad X + Y = E, \quad XY = O$$

をみたすとする．ここで，E と O はそれぞれ2次の単位行列と零行列を表す．このとき，$X + Y = E$ の両辺に左から X を掛けると $X^2 = X$ が成り立つことがわかる．

(1) $Y^2 = Y$, $YX = O$ が成り立つことを示せ．

(2) A が E の定数倍ではないとき，$A - aE$ と $A - bE$ はともに逆行列をもたないことを示せ．

(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，a, b $(a < b)$ および X, Y を求めよ．

(3) $A - aE = \begin{pmatrix} -1-a & 2 \\ 6 & 3-a \end{pmatrix}$, $A - bE = \begin{pmatrix} -1-b & 2 \\ 6 & 3-b \end{pmatrix}$

(2)より，ともに逆行列をもたないので，$\det(A-aE) = \det(A-bE) = 0$

$\therefore (-1-a)(3-a) - 12 = 0$

$\therefore a^2 - 2a - 15 = 0$

$(a-5)(a+3) = 0$

$\therefore a = 5, -3$

$a < b$ より，$\underline{a = -3,\ b = 5}$ //

このとき，$\begin{cases} A = -3X + 5Y \\ E = X + Y \end{cases}$ より $\begin{cases} X = \frac{1}{8}(5E - A) \\ Y = \frac{1}{8}(A + 3E) \end{cases}$

$\therefore \underline{X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ Y = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}$ //