

2010年文系第3問

3  $a, b$  を正の実数とし、座標平面上の放物線  $C: y = ax^2 + b$  を考える。  $t, s$  は正の実数とし、点  $P(t, at^2 + b)$  における  $C$  の接線を  $l_P$ 、点  $Q(s, as^2 + b)$  における  $C$  の接線を  $l_Q$  で表す。  $l_P$  は原点を通っているとする。 次の問いに答えよ。

- (1)  $l_P$  の傾きが 1 未満となるための必要十分条件を、  $a$  と  $b$  を用いて表せ。
- (2)  $l_P$  の傾きは 1 未満とし、  $l_P$  と  $x$  軸がなす鋭角を  $\theta$  と表す。  $Q$  を  $l_Q$  と  $x$  軸がなす鋭角が  $2\theta$  になるようにとるとき、  $l_Q$  の傾きを  $a$  と  $b$  を用いて表せ。
- (3)  $a, b$  が  $a + b = \frac{1}{2}$  をみたすとき、  $l_P$  の傾きは 1 未満であることを示せ。
- (4)  $a, b$  は  $a + b = \frac{1}{2}$  をみたすものとし、  $Q$  を (2) のようにとる。  $l_Q$  の傾きが最大になるような  $a, b$  を求めよ。