大阪市立大学

2014年第3問

$\boxed{3}$ 1次変換 f は点 $(1,\ 3)$ を点 $(3,\ 5)$ へ，点 $(1,\ -1)$ を点 $(1,\ -1)$ へ移すとする．f を表す行列を A とするとき，次の問いに答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A^2, A^3 を求めよ．

(3) 自然数 n に対して A^n を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ．

(1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと．$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\therefore a+3b=3,\ c+3d=5 \cdots$ ①

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\therefore a-b=1,\ c-d=-1 \cdots$ ②

①，②より．$a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{2},\ d=\frac{3}{2}$ $\therefore \underline{A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$ //

(2) $A^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ $\therefore \underline{A^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}$ //

$A^3=A\cdot A^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}$ $\therefore \underline{A^3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}}$ //

(3) $A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+1 & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n+1 \end{pmatrix}$ と推測する．数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき．$A^1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ となり成り立つ

(ii) $n=k$ のとき 成り立つと仮定すると．$A^k=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^k+1 & 2^k-1 \\ 2^k-1 & 2^k+1 \end{pmatrix}$

$$\therefore A^{k+1}=A\cdot A^k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k+1 & 2^k-1 \\ 2^k-1 & 2^k+1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3\cdot 2^k+3+2^k-1 & 3\cdot 2^k-3+2^k+1 \\ 2^k+1+3\cdot 2^k-3 & 2^k-1+3\cdot 2^k+3 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^{k+1}+1 & 2^{k+1}-1 \\ 2^{k+1}-1 & 2^{k+1}+1 \end{pmatrix}$$

$\therefore n=k+1$ のときも成り立つ

(i)，(ii)より．自然数 n に対して $A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+1 & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n+1 \end{pmatrix}$ が成り立つ ▨