

2012 年 理系 第 4 問

4 $|a^2 - 2b^2| = 1$ をみたす整数 a, b によって, $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ と表される 2 次の正方行列全体の集合を U とする. このとき, U に属する行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ に対して, $f(A) = a + \sqrt{2}b$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) 二つの行列 A と B が U に属するならば, 積 AB も U に属することを示し, さらに $f(AB) = f(A)f(B)$ が成り立つことを示せ.
- (2) U に属する行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ について, $f(A) \geq 1$ ならば, $-1 \leq a - \sqrt{2}b \leq 1$ が成り立つことを示せ.
- (3) U に属する行列 A について, $1 \leq f(A) < 1 + \sqrt{2}$ ならば, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ.
- (4) U に属する行列 A について, $1 + \sqrt{2} \leq f(A) < (1 + \sqrt{2})^2$ ならば, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ.