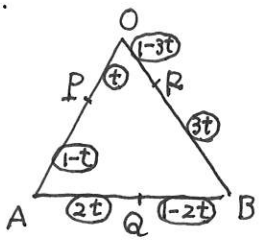
大阪薬科大学

2013年 薬学部 第2問

数理 石井K

2 次の問いに答えなさい．

実数 t に対し，一辺の長さが1の正三角形OABの辺OAを $t:(1-t)$ に内分する点をP，辺ABを $2t:(1-2t)$ に内分する点をQ，辺BOを $3t:(1-3t)$ に内分する点をRとする．ただし，P，Q，Rは正三角形OABの辺上にあり，いずれの頂点とも一致しないものとする．



(1) t がとる値の範囲は □ である． $0<t<\frac{1}{3}$

(2) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする．

(i) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ □ である． $\frac{1}{2}$

(ii) $\overrightarrow{PQ}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を使って表すと，$\overrightarrow{PQ}=$ □ となる． $(1-3t)\vec{a}+2t\vec{b}$

(iii) $\angle QPR=\frac{\pi}{2}$ となるのは，$t=$ □ のときである． $2-\sqrt{3}$

(3) 三角形PQRの面積を S とする．S を t を使って表し，また S の最小値を求めなさい． $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(11t^2-6t+1)$ 最小値 $\frac{\sqrt{3}}{22}$

(1). P,Q,Rが辺上にあることから，$0<t<1$ かつ $0<2t<1$ かつ $0<3t<1$ $\left(t=\frac{3}{11}\text{のとき}\right)$

$\therefore\ 0<t<\frac{1}{3}$ //

(2) (i) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ //

(ii) $\overrightarrow{OP}=t\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=(1-2t)\vec{a}+2t\vec{b}$ より，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(1-3t)\vec{a}+2t\vec{b}$ //

(iii) $\overrightarrow{OR}=(1-3t)\vec{b}$ より，$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=-t\vec{a}+(1-3t)\vec{b}$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{PR}\iff\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0$ より． $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\{(1-3t)\vec{a}+2t\vec{b}\}\cdot\{-t\vec{a}+(1-3t)\vec{b}\}$

$=-t(1-3t)+\{(1-3t)^2-2t^2\}\vec{a}\cdot\vec{b}+2t(1-3t)$

$=\frac{1}{2}t^2-2t+\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{2}t^2-2t+\frac{1}{2}=0$ より $t=2\pm\sqrt{3}$ (1)より $0<t<\frac{1}{3}$ なので $t=2-\sqrt{3}$ //

(3) $S=\triangle ABO-\triangle OPR-\triangle PAQ-\triangle RQB$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\cdot t\cdot(1-3t)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot(1-t)2t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot3t(1-2t)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(11t^2-6t+1)$ //

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{11\left(t-\frac{3}{11}\right)^2+\frac{2}{11}\right\}$ より，S は $t=\frac{3}{11}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{3}}{22}$ をとる //