

2016年 商学部 第2問



2 各辺の長さが1の正四面体OABCを考える。辺OAを2:1に内分する点をD, 辺BCを2:1に内分する点をEとする。このとき、線分DEの長さを求めよ。

$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c} \text{ とおくと,}$$

OABCは正四面体より,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

$$\vec{OD} = \frac{2}{3}\vec{a}, \vec{OE} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \text{ より,}$$

$$\vec{DE} = \vec{OE} - \vec{OD}$$

$$= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

よって,

$$|\vec{DE}|^2 = \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{9}|\vec{c}|^2 - \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{8}{9}\vec{c} \cdot \vec{a}$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

$$\therefore |\vec{DE}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

