



2016年理系第1問

 数理
石井

1 i を虚数単位とし, $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) z^5 および $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ の値を求めよ.
 (2) $t = z + \frac{1}{z}$ とおく. $t^2 + t$ の値を求めよ.
 (3) $\cos \frac{2\pi}{5}$ の値を求めよ.
 (4) 半径1の円に内接する正五角形の1辺の長さの2乗を求めよ.

(1) ド・モアブルの定理より.

$$\begin{aligned} z^5 &= \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)^5 \\ &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore z^5 - 1 = 0 \text{ より, } (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

$$z \neq 1 \text{ より, } \underline{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0}$$

(2) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ の両辺を z^2 ($\neq 0$) で割って,

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\therefore \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - 2 + 1 + \left(z + \frac{1}{z} \right) = 0$$

$$\therefore \underline{t^2 + t = 1}$$

(3) $t^2 + t - 1 = 0$ より. $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$... ①

また, $t = z + \frac{1}{z}$ より,

$$\begin{aligned} t &= \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} \\ &= 2 \cos \frac{2\pi}{5} \quad \dots \text{②} \end{aligned}$$

$$0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \text{ より, } \cos \frac{2\pi}{5} > 0 \quad \therefore \text{①, ② より, } 2 \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \therefore \underline{\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}$$

(4) 一辺の長さを l とすると余弦定理より.

$$\begin{aligned} l^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \\ &= \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

