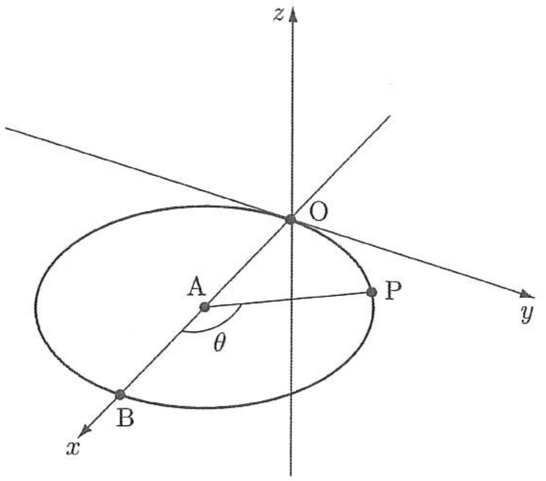
佐賀大学

2015年 理工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 点Oを原点とし，x 軸，y 軸，z 軸を座標軸とする座標空間において，3点A(1, 0, 0)，B(2, 0, 0)，C(1, 0, 1)がある．点Aを中心とする xy 平面上の半径1の円周上に点Pをとり，図のように $\theta = \angle \mathrm{BAP}$ とおく．ただし，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ とする．また，直線CPと yz 平面の交点をQとおく．このとき，次の問に答えよ．



(1) 点Pの座標を θ を用いて表せ．

(2) 点Qの座標を θ を用いて表せ．

(3) θ の値が $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で変化するとき，yz 平面における点Qの軌跡の方程式を求め，その概形を図示せよ．

(1) $\underline{\mathrm{P}(1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)}$ //

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ より，$\mathrm{Q}(0, y, z)$ とおくと．

$(-1,\ y,\ z-1) = k(\cos\theta,\ \sin\theta,\ -1)$

$\therefore \begin{cases} -1 = k\cos\theta \\ y = k\sin\theta \\ z-1 = -k \end{cases} \iff k = -\dfrac{1}{\cos\theta},\ y = -\tan\theta,\ z = 1+\dfrac{1}{\cos\theta}$ $\quad \therefore \underline{\mathrm{Q}\left(0,\ -\tan\theta,\ 1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)}$ //

(3) $y = -\tan\theta,\ z = 1+\dfrac{1}{\cos\theta}$ を

$\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して．

$(-y)^2 + 1 = (z-1)^2 \quad \therefore (z-1)^2 - y^2 = 1$

また，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ より，$\cos\theta < 0 \quad \therefore \dfrac{1}{\cos\theta} < 0$

$\therefore z < 1$

よって，点Qの軌跡は．$x = 0,\ (z-1)^2 - y^2 = 1\ (z \leqq 0)$

$\therefore$ 右図のようになる．