埼玉大学

2014年 第1問

1 $a_1=3$, $a_{n+1}=\dfrac{5a_n-4}{2a_n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n>2$ であることを示せ．

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ とおく．数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(1) $a_{n+1}=\dfrac{2(2a_n-1)+a_n-2}{2a_n-1}=2+\dfrac{a_n-2}{2a_n-1}$ … (*)

数学的帰納法で示す

(i) $n=1$ のとき．$a_1=3>2$ より成り立つ

(ii) $n=k$ のとき．成り立つと仮定すると．$a_k>2$ が成り立つ

このとき (*) より $a_{k+1}=2+\dfrac{a_n-2}{2a_n-1}>2$ ∴成り立つ

(i), (ii) よりすべての n：自然数に対し，$a_n>2$ が成り立つ ■

(2) (*) より．$a_{n+1}-2=\dfrac{a_n-2}{2(a_n-2)+3}$ ∴ $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{b_n}}{2\cdot\frac{1}{b_n}+3}$

∴ $b_{n+1}=\dfrac{\frac{2}{b_n}+3}{\frac{1}{b_n}}=2+3b_n$ ∴ $b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

∴ 数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=\dfrac{1}{a_1-2}+1=2$，公比3の等比数列

∴ $b_n+1=2\cdot3^{n-1}$ ∴ $\underline{b_n=2\cdot3^{n-1}-1}$ //

(3) (2) より $a_n-2=\dfrac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}$

∴ $a_n=2+\dfrac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}2+\dfrac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}$

$=\underline{2}$ //