埼玉大学

2016年 理学部 第2問

1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$, $g(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{2(x^2+x+1)}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $g(f(x))=f(2x+1)$ が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定め，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1=\frac{1}{2},\quad b_{n+1}=g(b_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．

(ア) $b_n=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

(イ) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(ウ) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

(1) $g(f(x))=\dfrac{\left(\frac{3^x-1}{3^x+1}\right)^2+4\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1}+1}{2\left\{\left(\frac{3^x-1}{3^x+1}\right)^2+\frac{3^x-1}{3^x+1}+1\right\}}$

$$=\frac{(3^x-1)^2+4(3^x-1)(3^x+1)+(3^x+1)^2}{2(3^x-1)^2+2(3^x-1)(3^x+1)+2(3^x+1)^2}$$

$$=\frac{3^{2x}-2\cdot3^x+1+4(3^{2x}-1)+3^{2x}+2\cdot3^x+1}{2(3^{2x}-2\cdot3^x+1)+2(3^{2x}-1)+2(3^{2x}+2\cdot3^x+1)}$$

$$=\frac{6\cdot3^{2x}-2}{6\cdot3^{2x}+2}$$

$$=\frac{3^{2x+1}-1}{3^{2x+1}+1}$$

$$=f(2x+1)\quad ▨$$

(2)(ア) 数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$f(a_1)=f(1)=\dfrac{3-1}{3+1}=\dfrac{1}{2}=b_1$ ∴成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定する

$b_k=f(a_k)$ …(＊) が成り立っている

$b_{k+1}=g(b_k)\overset{(＊)より}{=}g(f(a_k))\overset{(1)より}{=}f(2a_k+1)=f(a_{k+1})$ ∴ $n=k+1$ のときも成り立つ

2016年 理学部 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$，$g(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{2(x^2+x+1)}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $g(f(x))=f(2x+1)$ が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定め，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1=\frac{1}{2},\quad b_{n+1}=g(b_n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．

（ア）$b_n=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

（イ）数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

（ウ）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ．

(2)(ア)のつづき

(i),(ii)より $n=1,2,3,\cdots$ において $b_n=f(a_n)$ が成り立つ ▨

(イ) $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

∴ 数列 $\{a_n+1\}$ は初項2，公比2の等比数列であり，

$a_n+1=2^n$　　∴ $\underline{a_n=2^n-1}$〃

$b_n=f(a_n)$ より，　$b_n=\dfrac{3^{a_n}-1}{3^{a_n}+1}=\underline{\dfrac{3^{2^n-1}-1}{3^{2^n-1}+1}}$〃

(ウ) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{t\to\infty}\frac{3^t-1}{3^t+1}$　（$t=2^n-1$ とおいた）

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3^t}}{1+\frac{1}{3^t}}$

$=\underline{1}$〃