

2011年医学部第3問

3 文字 x, y, z の任意の整式 A に対して, x, y, z をそれぞれ $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ に置き換えて得られる θ の関数を $\tilde{A}(\theta)$ で表す. 例えば,

$$P = x^5 + z^4 - xyz \quad \text{ならば} \quad \tilde{P}(\theta) = \sin^5 \theta + \tan^4 \theta - \sin \theta \cos \theta \tan \theta,$$

$$P = x^2 + y^2, Q = 1 \quad \text{ならば} \quad \tilde{P}(\theta) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 = \tilde{Q}(\theta)$$

である. ただし θ の関数の定義域は $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ とする.

- (1) P を x, y, z の整式とする. $\tilde{P}(\theta) = \tilde{Q}(\theta)$ となる y, z の整式 Q が存在することを示せ.
- (2) P を x, y, z の整式とする. $\tilde{P}(0) = \tilde{P}(\pi)$ ならば, $\tilde{P}(\theta) = \tilde{Q}(\theta)$ となる x, z の整式 Q が存在することを示せ.
- (3) P を x, y, z の整式とする. $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のとき, および $\theta \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ のとき, $\tilde{P}(\theta)$ がそれぞれ収束するならば, $\tilde{P}(\theta) = \tilde{Q}(\theta)$ となる x, y の整式 Q が存在することを示せ. 収束とは, 一定の実数に限りなく近づくことである.