2011 年 医学部 第 3 問

$\boxed{3}$ 文字 x，y，z の任意の整式 A に対して，x，y，z をそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ に置き換えて得られる θ の関数を $\widetilde{A}(\theta)$ で表す．例えば，

$$P = x^5 + z^4 - xyz \quad \text{ならば} \quad \widetilde{P}(\theta) = \sin^5\theta + \tan^4\theta - \sin\theta\cos\theta\tan\theta,$$
$$P = x^2 + y^2,\ Q = 1 \quad \text{ならば} \quad \widetilde{P}(\theta) = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 = \widetilde{Q}(\theta)$$

である．ただし θ の関数の定義域は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$，$\theta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{2}$ とする．

(1) P を x，y，z の整式とする．$\widetilde{P}(\theta) = \widetilde{Q}(\theta)$ となる y，z の整式 Q が存在することを示せ．

(2) P を x，y，z の整式とする．$\widetilde{P}(0) = \widetilde{P}(\pi)$ ならば，$\widetilde{P}(\theta) = \widetilde{Q}(\theta)$ となる x，z の整式 Q が存在することを示せ．

(3) P を x，y，z の整式とする．$\theta \to \dfrac{\pi}{2}$ のとき，および $\theta \to \dfrac{3\pi}{2}$ のとき，$\widetilde{P}(\theta)$ がそれぞれ収束するならば，$\widetilde{P}(\theta) = \widetilde{Q}(\theta)$ となる x，y の整式 Q が存在することを示せ．収束とは，一定の実数に限りなく近づくことである．