2014 年 基幹理工・創造理工・先進理工 第 5 問

$\boxed{5}$ O を原点とする座標平面上に

放物線 $C_1 : y = x^2$，円 $C_2 : x^2 + (y-a)^2 = 1 \quad (a \geqq 0)$

がある．C_2 の点 $(0,\ a+1)$ における接線と C_1 が 2 点 A，B で交わり，△OAB が C_2 に外接しているとする．次の問に答えよ．

(1) a を求めよ．

(2) 点 $(s,\ t)$ を $(-1,\ a)$，$(1,\ a)$，$(0,\ a-1)$ と異なる C_2 上の点とする．そして点 $(s,\ t)$ における C_2 の接線と C_1 との 2 つの交点を $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ とする．このとき，$(\alpha-\beta)^2 - \alpha^2\beta^2$ は s，t によらない定数であることを示せ．

(3) (2) において，点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$ から C_2 への 2 つの接線が再び C_1 と交わる点を $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$，$\mathrm{R}(\gamma,\ \gamma^2)$ とする．$\beta + \gamma$ および $\beta\gamma$ を α を用いて表せ．

(4) (3) の 2 点 Q，R に対し，直線 QR は C_2 と接することを示せ．