

2013年医(医)・理(数理・物理・地環)・工・歯第3問

3 次の各問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC の垂心を H とする。次の等式が成り立つことを示せ。

$$\vec{HA} \cdot \vec{HB} = \vec{HB} \cdot \vec{HC} = \vec{HC} \cdot \vec{HA}$$

ただし、三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わる。この点を三角形の垂心という。

(2) 次の(i), (ii)に答えよ。

(i) 自然数 n に対して自然数 a_n を次のように定義する。

$$a_n = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1$$

このとき、すべての自然数 k に対して $(2k)! = 2^k k! a_k$ が成り立つ。このことを証明せよ。

(ii) すべての自然数 n に対して、 $2^n!$ は $2^{(2^n-1)}$ で割り切れる。このことを数学的帰納法で証明せよ。