



2011年工学部・生命環境（生命工）第5問

5 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 P_1 の座標を $(1, 1)$ とする. 定数 k ($0 < k < 1$) に対して, P_1 と点 $(0, k)$ を通る直線と C との交点を P_2 とする. ただし, P_2 は P_1 とは異なる点とする. P_2 と点 $(0, k^2)$ を通る直線と C との交点を P_3 とする. ただし, P_3 は P_2 とは異なる点とする. 以下同様にして, 自然数 n に対し, P_n と点 $(0, k^n)$ を通る直線と C との交点を P_{n+1} とする. ただし, P_{n+1} は P_n とは異なる点とする.

(1) P_{2n-1} および P_{2n} の座標を n と k を用いて表せ.

(2) 線分 $P_n P_{n+1}$ の長さを l_n とする. l_{2n-1}^2 および l_{2n}^2 を n と k を用いて表せ.

(3) $k = \frac{1}{2}$ のとき, 無限級数 $l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2 + \dots$ の和を求めよ.