2015年理（物・化）・工・情報第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=x^3-9x^2+24x$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減，極値を調べて，グラフの概形をかけ．

(2) k を定数とするとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ の共有点の個数を調べよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=6x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $f'(x)=3x^2-18x+24$

$=3(x^2-6x+8)$

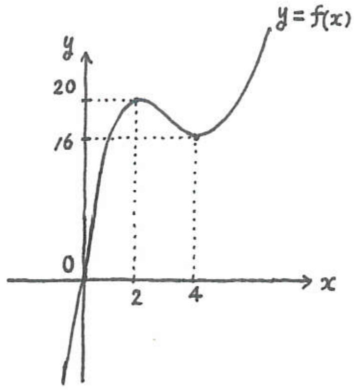
$=3(x-2)(x-4)$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

増減表より，極大値は $f(2)=8-36+48=20$，

極小値は，$f(4)=64-144+96=16$

よってグラフは右のようになる．



(2) $y=f(x)$ と $y=kx$ の共有点の個数は，方程式 $f(x)-kx=0$ の異なる実数解の個数に等しい

$f(x)-kx=0 \iff x(x^2-9x+24-k)=0$ $\cdots(*)$ ← 解の1つは，$x=0$

ここで，$g(x)=x^2-9x+24-k$ とおく

(i) $x=0$ が $g(x)=0$ の解となるとき，

$g(0)=24-k=0$ $\therefore k=24$ このとき，$(*)$ の実数解は，$x=9,\ 0$（重解）

(ii) $x=0$ が $g(x)=0$ の解ではないとき（$k\neq 24$ のとき）

$g(x)=0$ の判別式を D とすると，$D=(-9)^2-4\cdot1\cdot(24-k)=4k-15$

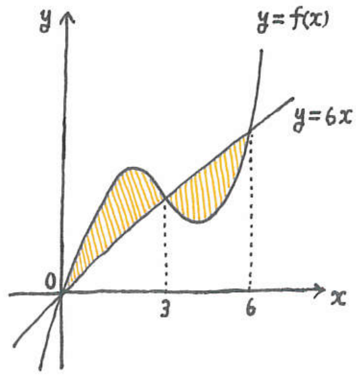
$(*)$ の実数解の個数は，$k<\frac{15}{4}$ のとき 1個，$k=\frac{15}{4}$ のとき 2個，$k>\frac{15}{4}$ かつ $k\neq 24$ のとき 3個．

(i)，(ii) をまとめると，$k<\frac{15}{4}$ のとき 1個，$k=\frac{15}{4},\ 24$ のとき 2個，$\frac{15}{4}<k<24,\ 24<k$ のとき 3個．//

(3) (2) の $k=6$ の場合であるから，$(*)$ は，

$x(x^2-9x+18)=0$ すなわち，$x(x-3)(x-6)=0$

∴ 交点の x 座標は $x=0,\ 3,\ 6$ であり，右図のようになる．



$$S=\int_0^3 x^3-9x^2+24x-6x\,dx+\int_3^6 6x-(x^3-9x^2+24x)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-3x^3+9x^2\right]_0^3+\left[-\frac{x^4}{4}+3x^3-9x^2\right]_3^6$$

$$=\frac{81}{4}-81+81-324+648-324-\left(-\frac{81}{4}+81-81\right)$$

$$=\frac{81}{2}$$ //