



2016年理学部(数)第3問

3 次の各問に答えよ.

- (1)  $x > 1$  のとき  $\log x < 2\sqrt{x} - 2$  を示し, これを用いて  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$  を求めよ. ただし,  $\log$  は自然対数を表す.
- (2) 関数  $y = \frac{\log x}{x}$  ( $x > 0$ ) の増減, 凹凸を調べ, そのグラフの概形をかけ.
- (3) 定積分  $I_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を以下で定義する.

$$I_n = \int_1^e \frac{(\log x)^{n-1}}{x^2} dx$$

ただし,  $e$  は自然対数の底である. このとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + nI_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots (*)$$

- (4) 等式 (\*) を用いて, 関数  $y = \frac{\log x}{x}$  のグラフと  $x$  軸および直線  $x = e$  で囲まれた図形を,  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.