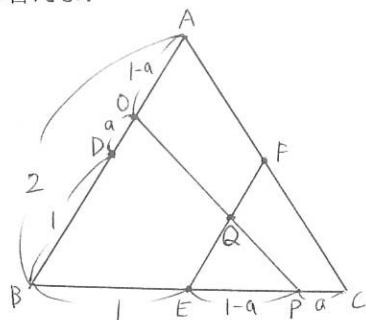


2015年 歯学部・薬学部・保健医療 第4問

増田

4 一辺の長さが2の正三角形ABCの3辺AB, BC, CAの中点をそれぞれD, E, Fとする. $0 < a < 1$ として, 線分ADを $(1-a):a$ に内分する点をO, 線分CEを $a:(1-a)$ に内分する点をPとし, 直線OPと直線EFの交点をQとする. $\vec{AD} = \vec{x}$, $\vec{AF} = \vec{y}$ とするとき, 以下の各問に答えよ.

- (1) \vec{OP} を \vec{x} , \vec{y} , a で表せ.
- (2) \vec{OQ} を \vec{OP} , a で表せ.
- (3) \vec{OP} , \vec{OB} のなす角を θ とするとき, $\cos^2 \theta$ を a で表せ.
- (4) $\theta = 45^\circ$ のときの a の値を求めよ.



$$\begin{aligned}
 (1) \vec{OP} &= \vec{OB} + \vec{BP} \\
 &= (a+1)\vec{x} + \frac{2-a}{2}\vec{BC} \\
 &= (a+1)\vec{x} + (2-a)(\vec{y}-\vec{x}) \\
 &= \underline{(2a-1)\vec{x} + (2-a)\vec{y}} \#
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{BC} &= \vec{AC} - \vec{AB} \\
 &= 2\vec{y} - 2\vec{x}
 \end{aligned}$$

(2) E, F はそれぞれ BC, AC の中点だから
中点連結定理より $AB \parallel EF$
 $(OB \parallel OE)$

$$\therefore OQ:QP = BE:EP = 1:(1-a)$$

$$OQ:OP = 1:(2-a)$$

$$\vec{OQ} = \frac{1}{2-a}\vec{OP} \#$$

$$(3) \vec{OP} \cdot \vec{OB} = |\vec{OP}| |\vec{OB}| \cos \theta \quad \text{①}$$

$$|\vec{OB}| = 1+a$$

$$(|\vec{x}| = |\vec{y}| = 1)$$

$$|\vec{OP}|^2 = |(2a-1)\vec{x} + (2-a)\vec{y}|^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (2a-1)^2 + (2-a)^2 \\
 &\quad + 2(2a-1)(2-a) \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{y}}_{\parallel}
 \end{aligned}$$

$$1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$= 5a^2 - 8a + 5 + (-2a^2 + 5a - 2)$$

$$= 3a^2 - 3a + 3$$

$$= 3(a^2 - a + 1)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{OP} \cdot \vec{OB} &= \{(2a-1)\vec{x} + (2-a)\vec{y}\} \cdot \{(1+a)\vec{x}\} \\
 &= (2a-1)(1+a) + (2-a)(1+a) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}a(a+1)$$

$$\text{①より} \cos \theta = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OP}| |\vec{OB}|}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{(\vec{OP} \cdot \vec{OB})^2}{|\vec{OP}|^2 |\vec{OB}|^2}$$

$$= \frac{\frac{9}{4}a^2(a+1)^2}{3(a^2-a+1)(a+1)^2}$$

$$= \frac{3a^2}{4(a^2-a+1)} \#$$

$$(4) \theta = 45^\circ \text{ or } 135^\circ. \quad \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4(a^2-a+1)}$$

$$6a^2 = 4a^2 - 4a + 4$$

$$a^2 + 2a - 2 = 0$$

$$a = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$0 < a < 1 \text{ より } a = \underline{\sqrt{3} - 1} \#$$