0001647452538999

東北大学

2014年第1問

$\boxed{1}$ $x = t + \dfrac{1}{3t}$ $\left(0 < t \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ とする.

(1) xのとり得る値の範囲を求めよ.

(2) xの方程式$x^2 + ax + b = 0$が(1)の範囲に少なくとも1つの解をもつような点$(a,\ b)$の存在範囲を図示せよ.

(注) いろんな意味で 相加・相乗ではX

(1) $x'(t) = 1 - \dfrac{1}{3t^2} = \cancel{\dfrac{-1+3t^2}{3t^2}} = \dfrac{3t^2-1}{3t^2}$

$\therefore$ $x'(t) = 0$ となるのは. $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき.

$\therefore$ $0 < t \leqq \dfrac{1}{2}$ で xは単調減少

右の増減表より. $x \geqq \dfrac{7}{6}$ //

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$x'(t)$		$-$	
$x(t)$	(∞)	↘	$\frac{7}{6}$

(2)

(i) $x \geqq \frac{7}{6}$に ~~異なる~~ 2つの解をもつとき. (重解も含む)

- $D \geqq 0$ より. (D: 判別式)
  $D = a^2 - 4b \geqq 0$
- (軸) $\geqq \frac{7}{6}$ より
  $-\dfrac{a}{2} \geqq \dfrac{7}{6}$ $\therefore$ $a \leqq -\dfrac{7}{3}$
- $f(x) = x^2 + ax + b$ とおくと $f\left(\frac{7}{6}\right) \geqq 0$
  $\dfrac{49}{36} + \dfrac{7}{6}a + b \geqq 0$

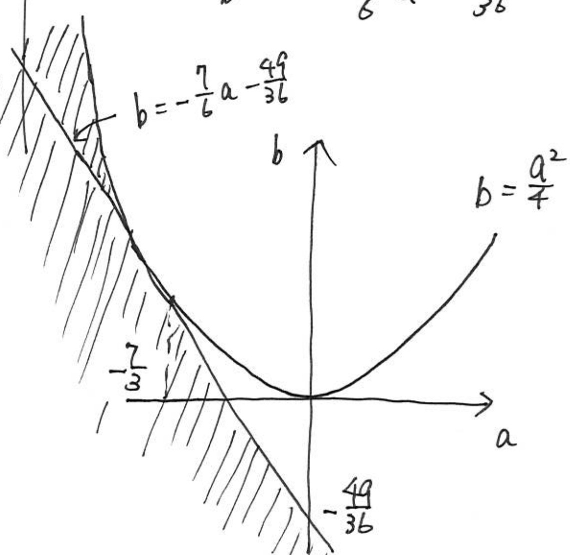
以上より.

$$\begin{cases} b \leqq \dfrac{a^2}{4} \text{ かつ} \\ a \leqq -\dfrac{7}{3} \text{ かつ} \\ b \geqq -\dfrac{7}{6}a - \dfrac{49}{36} \end{cases}$$

(ii) ちょうど1つの解をもつとき.

$f\left(\frac{7}{6}\right) = \dfrac{49}{36} + \dfrac{7}{6}a + b \leqq 0$

$\therefore$ $b \leqq -\dfrac{7}{6}a - \dfrac{49}{36}$



上の図になる (~~境~~ 境界線も含む)