0002051818497999

東北学院大学

2015年 工学部 第2問

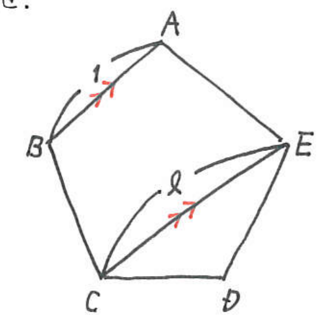
数理 石井K

$\boxed{2}$ 一辺の長さが1の正五角形ABCDEがある．$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$，$\vec{b} = \overrightarrow{AE}$，$l = |\overrightarrow{EC}|$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) ABとECが平行であることに注意して，$\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$l$ を用いて表せ．

(2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を $l$ を用いて表せ．

(3) $l$ を求めよ．




(1) $AB \parallel EC$，$AB = 1$，$EC = l$ より

$\overrightarrow{EC} = l \cdot \vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = \vec{b} + \overrightarrow{EC}$ $\quad \therefore \underline{\overrightarrow{AC} = l\vec{a} + \vec{b}}$ //

(2) $|\overrightarrow{AC}|^2 = l^2|\vec{a}|^2 + 2l\,\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{EC}| = l$ より．$l^2 = l^2 + 2l\,\vec{a}\cdot\vec{b} + 1$ $\quad \therefore \underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = -\dfrac{1}{2l}}$ //

（$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1 - \frac{1}{2}l^2$ でも 正解となる）

(3) $\angle BAE = \theta$ とおくと (2) より

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = -\dfrac{1}{2l}$ $\quad \therefore \cos\theta = -\dfrac{1}{2l}$

余弦定理を $\triangle ABE$ に使って

$l^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot1\cdot1\cdot\left(-\dfrac{1}{2l}\right)$

$\therefore l^3 - 2l - 1 = 0$

$(l+1)(l^2 - l - 1) = 0$

$l > 0$ より．$\underline{l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ //

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & l^2 - l - 1 \\
l+1 \,\big) & l^3 - 2l - 1 \\
 & \underline{l^3 + l^2} \\
 & -l^2 - 2l - 1 \\
 & \underline{-l^2 - l} \\
 & -l - 1 \\
 & \underline{-l - 1} \\
 & 0
\end{array}
$$