東京大学

2015年 理系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ a を正の実数とし，p を正の有理数とする．座標平面上の2つの曲線 $y = ax^p$ $(x > 0)$ と $y = \log x$ $(x > 0)$ を考える．この2つの曲線の共有点が1点のみであるとし，その共有点をQとする．以下の問いに答えよ．必要であれば，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてよい．

(1) a および点Qの x 座標を p を用いて表せ．

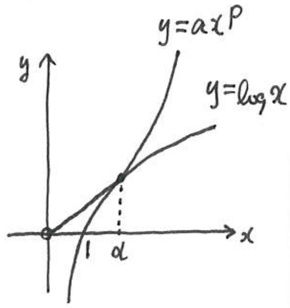
(2) この2つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を p を用いて表せ．

(3) (2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ．

(1) $f(x) = ax^p - \log x$ $(x > 0)$ とおくと．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x} = \infty$ を使う

$$\lim_{x\to+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \log x \cdot \left(\frac{x^p}{\log x}\cdot a - 1\right) = \infty$$



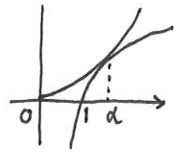
∴ 共有点が1点のみ ⇔ 接する

∴ 接点の x 座標を α とおくと，$a\alpha^p = \log\alpha$ かつ $pa\alpha^{p-1} = \dfrac{1}{\alpha}$

$$\Leftrightarrow a\alpha^p = \log\alpha \text{ かつ } pa\alpha^p = 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{\alpha = e^{\frac{1}{p}}} \text{ かつ } \underline{a = \frac{1}{ep}}$$

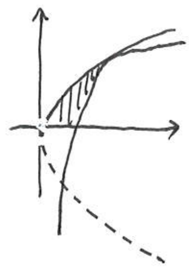
(2) $$V = \pi\int_0^\alpha (ax^p)^2 dx - \pi\int_1^\alpha (\log x)^2 dx$$



$$= \pi\left[\frac{a^2}{2p+1}x^{2p+1}\right]_0^\alpha - \pi\left[x(\log x)^2\right]_1^\alpha + \pi\int_1^\alpha 2\log x\, dx$$

$$= \pi\cdot\frac{a^2}{2p+1}\alpha^{2p+1} - \pi\left(\alpha(\log\alpha)^2\right) + 2\pi\left[x\log x\right]_1^\alpha - 2\pi\left[x\right]_1^\alpha$$

$$= \pi\cdot\frac{a^2}{2p+1}\cdot\alpha^{2p+1} - \pi\cdot\frac{\alpha}{p^2} + 2\pi\left(\frac{\alpha}{p}\right) - 2\pi(\alpha - 1)$$



$$= \underline{\pi\left\{\frac{e^{2+\frac{1}{p}}}{(2p+1)e^2p^2} - \frac{e^{\frac{1}{p}}(2p^2-2p+1)}{p^2} + 2\right\}}$$

通分したら．もっと簡単になった！

$$= \underline{\pi\cdot\left\{\frac{2-4p}{2p+1}e^{\frac{1}{p}} + 2\right\}}$$

(3) (2)より． $p^2e^{2+\frac{1}{p}} = e^{2+\frac{1}{p}}\cdot p^2(2p+1)(2p^2-2p+1)$

$p^2e^{2+\frac{1}{p}} > 0$ より $(2p+1)(2p^2-2p+1) = 1$

$$\therefore 2p^2(2p-1) = 0$$

$p > 0$ より． $\underline{p = \dfrac{1}{2}}$