



2015年 第1問

1 正の実数  $a$  に対して、座標平面上で次の放物線を考える。

$$C: y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

$a$  が正の実数全体を動くとき、 $C$  の通過する領域を図示せよ。

$$C: 4ay = 4a^2x^2 + 1 - 4a^2$$

$$\therefore 4(x^2-1)a^2 - 4ay + 1 = 0$$

これを  $a$  に関する方程式とみると

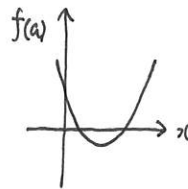
(i)  $x = \pm 1$  のとき  $y \neq 0$  となり

$$a = \frac{1}{4y} > 0 \quad \therefore y > 0$$

(ii)  $x > 1$  または  $x < -1$  のとき.

$$f(a) = 4(x^2-1)a^2 - 4ay + 1 \text{ とおくと.}$$

$$f(0) = 1 > 0 \text{ なので}$$



$$\begin{cases} \text{軸} > 0 \\ \text{か} \\ \text{D} \geq 0 \end{cases} \text{ となればよい}$$

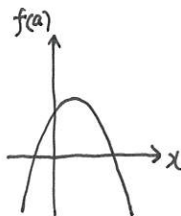
$$\therefore -\frac{-4y}{8(x^2-1)} = \frac{y}{2(x^2-1)} > 0 \Leftrightarrow y > 0$$

$$D/4 = (2y)^2 - 4(x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \leq 1 \text{ (双曲線)}$$

(iii)  $-1 < x < 1$  のとき

$$f(0) = 1 > 0 \text{ より}$$

$y$  はすべての実数で成り立つ



(i) ~ (iii) より 右図の斜線部分 (ただし境界線は含めが点  $(\pm 1, 0)$  は含まない) **実線の**

