0001970189208999

東京大学

2015年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 以下の命題A，Bそれぞれに対し，その真偽を述べよ．また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ．

命題A　nが正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ．

命題B　整数 n，m，ℓ が $5n+5m+3\ell=1$ をみたすならば，$10nm+3m\ell+3n\ell<0$ が成り立つ．

A.

$f(x)=\dfrac{x^3}{26}-x^2+100$ とおくと．$f'(x)=\dfrac{1}{26}(3x^2-52x)$

x	0	$\cdots$	$\frac{52}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	100	$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore f'(x)=0$ となるのは．$x=0,\ \dfrac{52}{3}$

$17<\dfrac{52}{3}<18$

$n=17,18$ が反例として怪しいと分かる

よって，$n=17$ として計算してみると，

$(\text{左辺})=\dfrac{17\times17\times17}{26}+100=\dfrac{17\times17\times17+2600}{26}<288.97$

$(\text{右辺})=289$　　　$\therefore$ 偽であり，反例は $n=17$ //

B. $5n+5m+3\ell=1$ より，$3\ell=1-5n-5m$

$$\begin{aligned}\therefore 10nm+3m\ell+3n\ell &= 10nm+3\ell(m+n)\\ &= 10nm+(1-5n-5m)(m+n)\\ &= 10nm+m+n-5(m+n)^2\\ &= -5n^2+n-5m^2+m\end{aligned}$$

ここで，$g(x)=-5x^2+x$ とおくと，$g(x)=-5\left(x-\dfrac{1}{10}\right)^2+\dfrac{1}{20}$

$\therefore g(n)$ は n：整数より．$g(0)$ と $g(1)$ のうち大きい方が $g(n)$ の最大値となる

$g(0)=0$，$g(1)=-4$　より．$g(n)\leqq 0$

同様にして．$g(m)\leqq 0$　ただし．$5n+5m+3\ell=1$ より．$g(n)=0$，$g(m)=0$ が同時に成り立つことはない（$\because \ell$ も整数であるから）

$\therefore 10nm+3m\ell+3n\ell=g(n)+g(m)<0$

$\therefore$ 真となる ▨