2014年 情報工学部 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{\sin x - x\cos x}{\dfrac{2}{\pi}-\cos x}$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}$ とする. $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

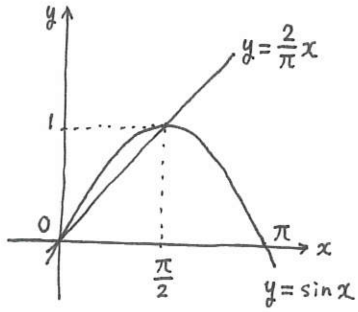
(2) $f'(x)>0$ を示せ.

(3) $\dfrac{\pi}{2}<f(x)<\pi$ を示せ.

(4) $f(x)<g(x)$ を示せ.

(1) $f'(x)=\dfrac{x\sin x\left(\frac{2}{\pi}-\cos x\right)-(\sin x - x\cos x)\cdot\sin x}{\left(\frac{2}{\pi}-\cos x\right)^2}$

$=\dfrac{\sin x\left(\frac{2}{\pi}x-\sin x\right)}{\left(\frac{2}{\pi}-\cos x\right)^2}$ //




(2) $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ より, $\cos x<0$, $\sin x>0$ であるから,

$\dfrac{2}{\pi}x-\sin x>0$ を示せばよい.

直線 $y=\dfrac{2}{\pi}x$ と $y=\sin x$ はともに原点と $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ を通るので

グラフは右のようになる. よって. $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ において.

$\dfrac{2}{\pi}x>\sin x$ が成り立つ. すなわち $f'(x)>0$ が成り立つ ▨

(3) (2) より $f(x)$ は単調増加であるから, $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ において.

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<f(x)<f(\pi)$　すなわち $\dfrac{\pi}{2}<f(x)<\dfrac{\pi}{\frac{2}{\pi}+1}<\dfrac{\pi}{1}=\pi$ ▨

(4) $f(x)<g(x) \iff \dfrac{\sin x - x\cos x}{\frac{2}{\pi}-\cos x}<\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}$

$\iff \sin x - x\cos x<\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)$　$\left(\because \dfrac{2}{\pi}-\cos x>0\right)$

ここで, $h(x)=\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)-\sin x+x\cos x$ とおくと,

$h'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)+\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin x-\cos x+\cos x-x\sin x$

$=\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}x\sin x+\dfrac{\pi}{4}\sin x$

$h''(x)=\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x+\dfrac{\pi}{4}\cos x$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos x$

2014年 情報工学部 第3問　2枚目／2枚　数理 石井K

3 $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\frac{2}{\pi} - \cos x}$, $g(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{4}$ とする．$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x) > 0$ を示せ．

(3) $\dfrac{\pi}{2} < f(x) < \pi$ を示せ．

(4) $f(x) < g(x)$ を示せ．

(4) のつづき.

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ において, $\frac{\pi}{2} - x < 0$ , $\cos x < 0$ より,

$h''(x) > 0$

$\therefore$ $h'(x)$ は単調増加であり, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ において,

$h'(x) > h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\pi} > 0$

$\therefore$ $h'(x) > 0$ より, $h(x)$ は単調増加であり, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ において

$h(x) > h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} - 1 = 0$

$\therefore$ $h(x) > 0$

これより, $f(x) < g(x)$ が成り立つ ▨